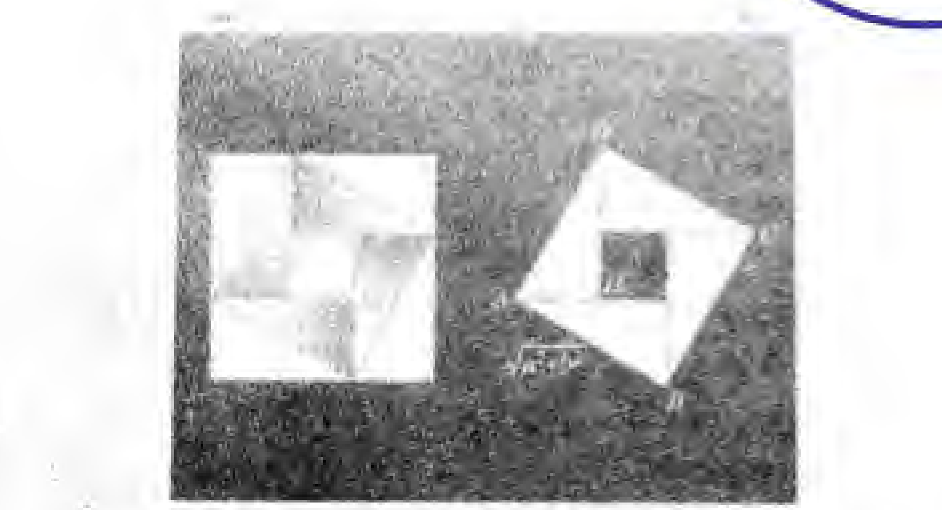
普通高中课程标准实验教科书

数学⑤

必修

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



A版

普通高中课程标准实验教科书
数学5必修A版
教师教学用书
人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著
*
人民教育出版社 出版发行
（北京沙滩后街55号 邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
北京四季青印刷厂印装 全国新华书店经销
*
开本：890毫米×1240毫米 1/16 印张：7.25 字数：138 000
2004年9月第1版 2005年1月第1次印刷
ISBN 7-107-18100-9
G·11189（课） 定价：6.90元

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列 1～5 以及选修 1、2 中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的．因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想与聚类分析思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过 1，几何中的度量却不受这种限制．
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计

算操作完成复杂计算的过程称为"算法"过程．在数学中，现代意义上的"算法"通常是指可以用计算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成．

"数量关系"

"数量关系"所涉及的内容可概括为如下结构图：

实数系　实数及其运算和大小关系．实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发．

复数系　复数及其运算．由实数扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数）．

向量系　向量及其运算．直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对 (x, y)，而空间中向量的坐标是三实数组 (x, y, z)．在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广．另一方面，在历史上，复数 $(a+bi)$ 曾被推广到四元数 $(a+xi+yj+zk)$，而其中的 $xi+yj+zk$ 被发展成现在的向量．从这里看到，向量的确是"数"（即四元数）的一部分．当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段、位移、力等）．

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙．

代数式　用文字代表数，我们有了变量 a、b、c、x、y、z 等．数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算．代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围．

方程　令两个含变数的代数式相等便得到方程．方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备．由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙．

不等式　把方程中的"="换成实数系所特有的">"（或"<"）便得到不等式，因而两者有类似的地方．如方程有同解变换，不等式也有"同解"变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$ 的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$ 取正值的 x 的全体．另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的"边界点"类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的"边界"．">"的性质比"="的性质"坏"许多，我们应非常小心地对待不等式．

初等函数I　令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y．这是人们知道的第一批函数中的一类．其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数，

即对数函数.

数列 数列及数列的运算. 在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列. 我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比. 不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数 描述周期现象的重要数学模型. 为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石. 三角函数是数形结合的产物.

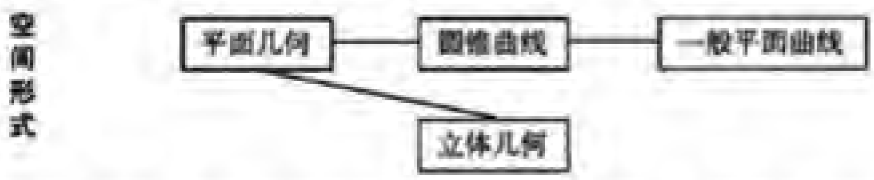
函数 函数及函数的运算（+、−、×）. 函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系. 它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，概括中学数学的三个重要观点.

函数的导数和积分 虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物. 这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算.

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何 讨论点，直线，直线的平行和垂直，三角形，圆等. 这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础.

圆锥曲线 在中学，给出它们的几何定义后，使用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们. 这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础.

立体几何 线线、线面、面面之间的位置关系. 特别重要的是垂直和平行关系. 对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉.

一般平面曲线 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方. 想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的.

“数形结合”

用三角函数解三角形 参看**三角函数**. 把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果. 举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a,b,C)$. 如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算.

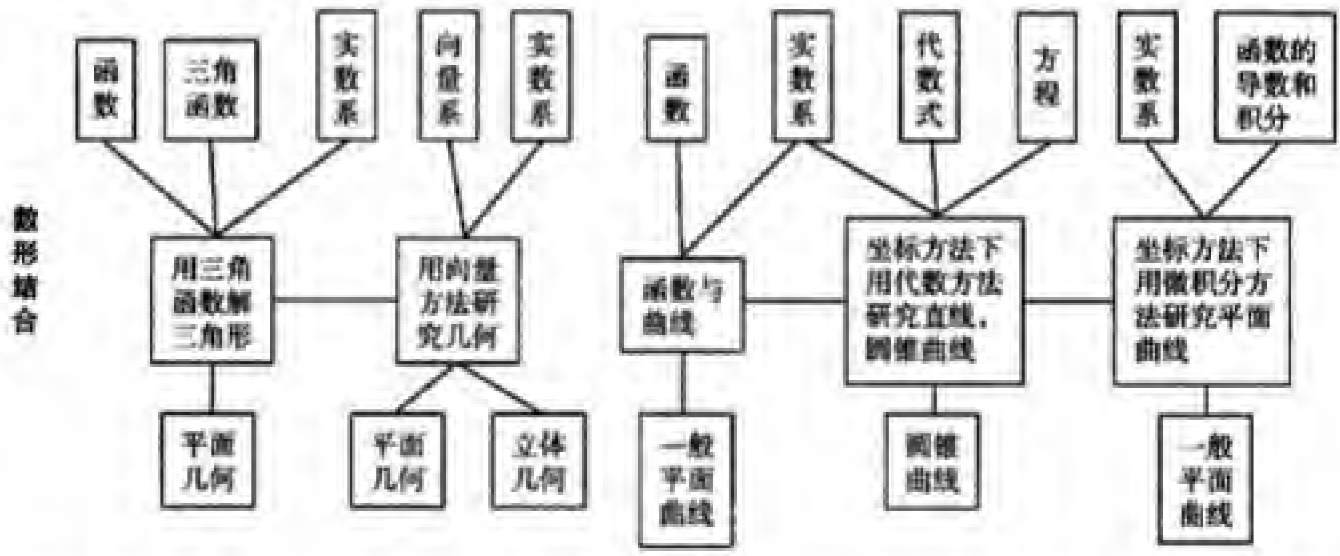
用向量来研究几何 用向量及其运算为工具. 用向量方法研究几何，可概括为“三步曲”：用向量表示出问题中关键的点，线，面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决.

函数与曲线 贯穿中学数学的一对孪生姐妹.

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线 用数及其运算为工具. 用代数方法研究几何，可概括为“三步曲”：用数（坐标），代数式，方程表示出问题中关键的点，距离，直线，圆锥曲线；对这些数，代数式，方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决.

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线 用导数和积分为工具. 用分析方法研究曲线. 在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积. 而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了. 微积分是研究曲线的强大工具.

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了.

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感.

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看**函数**.

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等.

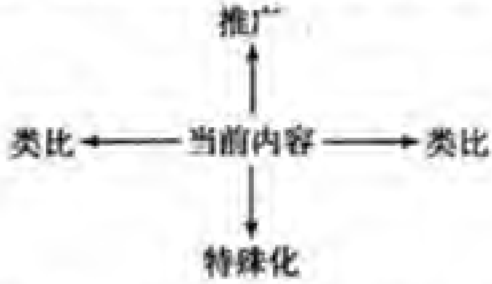
4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形. 直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来等等. 一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了.

5. “恒等”变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从“好”的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法等等.

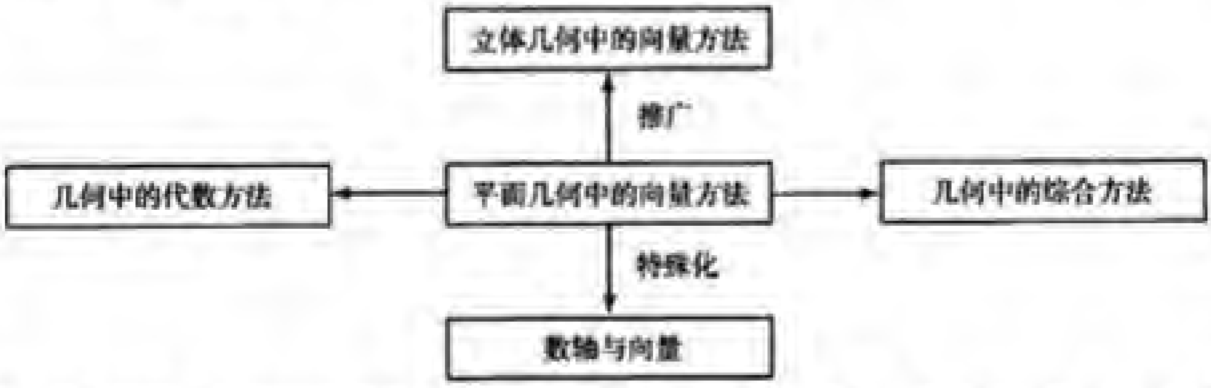
6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引人新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等.

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

主　编：[illegible]
副 主 编：[illegible]　[illegible]

本册主编：李建华
主要编者：俞求是　郭玉峰　宋莉莉　杨照宇　鲁彬
责任编辑：俞求是
绘　　图：王俊宏
设　　计：王　艾
封面设计：林荣桓

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括学生学习用书、课节练习、章节评价手册、教学设计与案例、寒暑假作业、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，**体现基础性、时代性、典型性和可接受性等**，具有如下特点：

1．“亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．

选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念和结论，数学的思想和方法，以及数学应用的学习情境，使学生产生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习．

2．“问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

3．“科学性”与“思想性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神．

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平．特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$\begin{tikzcd} & \text{推广} & \\ \text{类比} & \text{当前内容} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \text{类比} \\ & \text{特殊化} & \end{tikzcd}$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”

属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

4. "时代性"与"应用性"：以具有时代性和现实感的素材创设情境，加强数学活动，发展应用意识.

利用具有时代气息的、反映改革开放、市场经济下的社会生活和建设成就的素材创设情境，引导学生通过自己的数学活动，从事物中抽取"数""形"属性，从一定的现象中寻找共性和本质内涵，并进一步抽象概括出数学概念、结论，使学生经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉. 教科书设置了"观察与猜想""阅读与思考""探究与发现""信息技术应用"等栏目，为学生提供丰富的具有思想性、实践性、挑战性的，反映数学本质的选学材料，拓展学生的数学活动空间，发展学生"做数学""用数学"的意识.

5. "联系性"：以有层次和完整的结构，提供多种选择；将配套教材作为教材建设的有机组成部分.

本套教师教学用书按照相应的教科书章、节顺序编排，内容包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想. 包括：课程目标、学习目标、本章知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议、教科书编写意图与教学建议等.

（1）课程目标与学习目标说明学生通过学习本章内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

（2）本章知识结构框图展示了本章的知识结构，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

（3）内容安排说明按照全章内容的编排顺序，参照教科书"小结"中的"逻辑结构框图"，说明内容的前后逻辑关系，并对本章的重点、难点进行说明；

（4）课时安排建议根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以节为单位进行分析，着重说明了编写意图. 主要包括：本节知识结构、重点、难点、教科书编写的意图与教学建议等.

（1）本节知识结构讲述本节知识点及其发生、发展过程（逻辑关系），说明学习本节内容时，涉及的前后相关知识，采用"知识框图"或"表格"的方式表述；

（2）重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；

（3）难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

（4）编写意图与教学建议主要对教科书"为什么要这样写"进行分析，包括学

习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容.

（1）教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

（2）教学重点、难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

（3）教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

（4）教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习、应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

另外，我们专门提供了一套“信息技术支持系统”，需要时可从人教网上下载，网址是：http://www.pep.com.cn 新课标教材·高中·数学.

本书是必修课程数学 5 的教师教学用书，包括解三角形、数列、不等式三章内容. 全书共需 36 课时，具体分配如下

第 1 章　解三角形	约 8 课时
第 2 章　数列	约 12 课时
第 3 章　不等式	约 16 课时

在本书的编写过程中，除已列出的编者外，李龙才、任升录、张玮卓、郑建雄等为本书的完成提供了帮助. 本书审稿为章建跃、李建华.

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目 录

第一章 解三角形

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

在本章中，学生将在已有知识的基础上，通过对任意三角形边角关系的探究，发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系，并认识运用它们可以解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

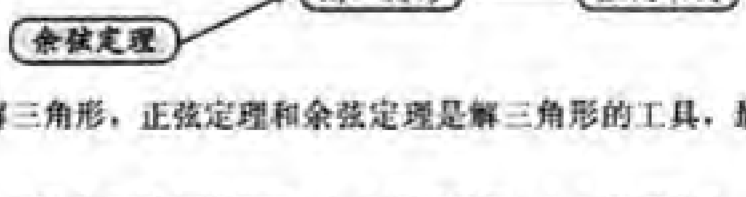
2. 学习目标

(1) 通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题.

(2) 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

二、本章内容安排

本章的知识框图如下：



本章的中心内容是解三角形，正弦定理和余弦定理是解三角形的工具，最后落实在解三角形的应用上.

本章共分三节：1.1 正弦定理和余弦定理，1.2 应用举例，1.3 实习作业.

正弦定理和余弦定理揭示了关于一般三角形中的重要边角关系，它们是解三角形的两个重要定理.

教科书首先引导学生回忆任意三角形中有大边对大角，小边对小角的边角关系，引导学生思考是否能得到这个边、角关系准确量化的表示. 对于此问题，首先研究比较特殊的直角三角形，这样就比较自然地引导到锐角三角函数，证明直角三角形中的正弦定理，进而利用锐角三角形中同一条高的不同表示证明锐角三角形中的正弦定理. 对于钝角三角形中的定理则要求学生自己探究得到. 然后，指出

并举例说明可以应用正弦定理能够解决的解三角形问题.

对于余弦定理，教科书首先研究把已知三角形的两条边及所夹的角判定三角形全等的方法进行量化，研究如何从已知的两边和它们的夹角计算出三角形的另一边和两个角的问题. 教科书利用向量的数量积比较容易地证明了余弦定理并进而证明其推论. 然后，举例说明可以应用余弦定理能够解决的解三角形问题.

正弦定理和余弦定理在实际测量中有许多应用，教科书介绍了它们在测量距离、高度、角度等问题中的一些应用.

本章内容有很强的实践性，教科书安排了一个利用本章知识的有关测量的实习作业.

三、课时分配

本章教学时间约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1 正弦定理和余弦定理	约 3 课时
1.2 应用举例	约 4 课时
1.3 实习作业	约 1 课时

II 教科书分析

本章的引言从一个测量问题引入："在我国古代就有嫦娥奔月的神话故事. 明月高悬，我们仰望夜空，会有无限遐想，不禁会问，遥不可及的月亮离我们地球究竟有多远呢?" 这个问题是一个不可及物体距离的测量问题，本章的许多问题是这类不可及物体的距离和高度的测量问题，而此问题则是人人都面临并会加以思考的，容易引起学生的兴趣和学习的愿望. 接着指出："在数学发展历史上，受到天文测量、航海测量和地理测量等方面实践活动的推动，解三角形的理论得到不断发展，并被用于解决许多测量问题." 这就点出了本章数学知识的某些重要的实际背景及其实际需要，使学生初步认识学习解三角形知识的必要性. 然后以一系列的实际问题引出本章要学习的数学知识："在初中，我们已经能够借助于锐角三角函数解决有关直角三角形的一些测量问题. 在实际工作中我们还会遇到许多其他的测量问题，这些问题仅用锐角三角函数就不够了，如：1. 怎样在航行途中测出海上两个岛屿之间的距离? 2. 怎样测量底部不可到达的建筑物的高度? 3. 怎样在水平飞行的飞机上测量飞机下方山顶的海拔高度? 4. 怎样测出海上航行的轮船的航速和航向? 这些问题的解决需要我们进一步学习任意三角形中边与角关系的有关知识. 在本章中我们要学习正弦定理和余弦定理，并学习应用这两个定理解三角形以及解决实际测量中的一些问题."

章前图有与本章内容密切相关的海港和海上灯塔的背景图以及月球环形山照片，期望能够反映解三角形的理论和知识在天文、航海等人类探索自然的实践过程中所起的重要作用.

1.1 正弦定理和余弦定理

一、本节知识结构

二、教学重点和难点

本节教学重点和难点是通过对于三角形的边角关系的探究，证明正弦定理和余弦定理.

三、编写意图与教学建议

本节约4课时，建议用2课时通过探究证明正弦定理，应用正弦定理解三角形，用2课时通过探究证明余弦定理，应用余弦定理解三角形.

正弦定理和余弦定理是关于一般三角形中的边角关系的两个重要定理，它们为解三角形提供了基本而重要的工具.

1.1.1 正弦定理

1. 正弦定理的推出

在初中学习过关于任意三角形中大边对大角，小边对小角的边角关系，这里一个重要的问题是，是否能得到这个边、角关系准确量化的表示．由于涉及边角之间的数量关系，就比较自然地引导到三角函数上去．在直角三角形中，边之间的比就是锐角的三角函数．研究直角三角形中的正弦，就能证明直角三角形中的正弦定理.

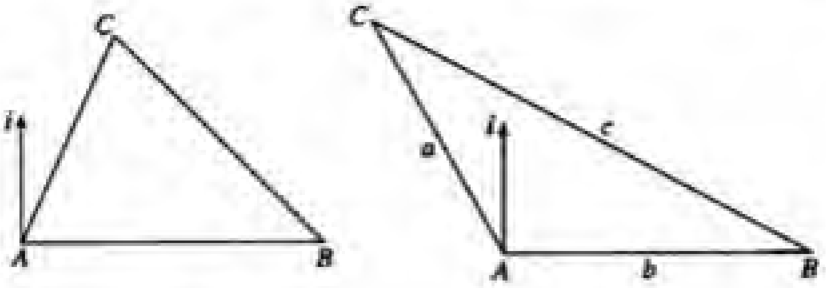
分析直角三角形中的正弦定理，考察结论是否适用于锐角三角形，可以发现 $a\sin B$ 和 $b\sin A$ 实际上表示了锐角三角形 AB 边上的高．这样，利用这个高的两个不同表示，就容易证明锐角三角形中的正弦定理.

钝角三角形中定理的证明要应用正弦函数的诱导公式，教科书要求学生自己通过探究来加以证明.

研究直角三角形中的其他三角函数，也可以证明直角三角形中的正弦定理，但不如直接用正弦函数直接、简明.

除了教科书中的证明方法以外，我们也可以借助于向量的方法证明正弦定理，教学中可以引导学生探究得到这种方法．证明如下：

当△ABC 是锐角三角形时，过点 A 作单位向量 $\boldsymbol{i}$ 垂直于 AB，因为



(1)　　　　(2)

图 1-1

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC},$$

所以

$$i\cdot\overrightarrow{AC}=i\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}),$$
$$i\cdot\overrightarrow{AC}=i\cdot\overrightarrow{AB}+i\cdot\overrightarrow{BC},$$

所以

$$b\cdot\cos(90^\circ-A)=c\cdot\cos 90^\circ+a\cdot\cos(90^\circ-B)$$

即

$$b\sin A=a\sin B,$$

得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

当$\triangle ABC$是钝角三角形时也可类似证明.

如果$\angle A<\angle B$，由三角形的性质，$a<b$. 当$\angle A$、$\angle B$都是锐角，由正弦函数在区间$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$上的单调性可知，$\sin A<\sin B$. 等式指出了三角形中边与对应角的正弦之间的一个关系式，它描述了三角形中大边与大角的一种准确的数量关系. 当$\angle A$是锐角，$\angle B$是钝角，因为$\angle A+\angle B<\pi$，所以$\angle B<\pi-\angle A$，由正弦函数在区间$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$上的单调性可知，$\sin B>\sin(\pi-A)=\sin A$，所以$\sin A<\sin B$. 等式$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$仍描述了此三角形中大边对大角的一种准确的数量关系. 所以，教科书指出，正弦定理非常好地描述了任意三角形中边与角的一种数量关系.

2. 解三角形

用正弦定理解三角形是正弦定理的一个直接应用. 教科书首先说明了什么是解三角形：一般地，把三角形的三个角A，B，C和它们的对边a，b，c叫做三角形的元素. 由已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

应该注意，上述对于解三角形的描述是对传统的关于解三角形的一个简化. 在传统的解三角形问题中，还把三角形的中线、高、角平分线等也作为三角形的元素. 教科书对此作了简化的处理，仅把边和角作为元素.

公式$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$实际上表示了三个等式，这就是：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

上面的每一个等式都表示了三角形两个角和它们的对边的关系，因此，正弦定理可以用于两类解三角形的问题：

（1）已知三角形的任意两个角与一边，求其他两边和另一角.

（2）已知三角形的两边与其中一边的对角，计算另一边的对角，进而计算出其他的边和角.

教科书用两个例题说明应用正弦定理解三角形的方法. 在已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形时，在某些条件下会出现无解的情形，教科书在探究与发现："关于解三角形的进一步讨论"中对此作了说明. 教科书的例 2 也涉及了这种情况，在得出了 $\sin B=0.8999$ 后应该指出，在 0°到 180° 之间，满足 $\sin B=0.8999$ 的角有两个，一个是锐角 64°，一个是钝角 116°，这两个角是否都符合要求呢？根据"三角形中大边对大角"来判断，因为 $b>a$，所以 $B>A$，而 $A=40^\circ$，可知求出的 B 的两个值都符合题意，即本题有两个解.

1.1.2　余弦定理

1. 对于余弦定理，教科书首先指出，根据判定三角形全等的方法，已知三角形的两条边及其所夹的角，这个三角形是大小、形状完全确定的三角形，解这个三角形，就是从量化的角度来研究问题，也就是研究如何从已知的两边和它们的夹角计算三角形的另一边和两个角的问题.

对于余弦定理，教科书利用向量的数量积进行证明. 这个定理用坐标法证明也比较容易，证法如下：

如图 1-2，以 C 为原点，边 CB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，设点 B 的坐标为 $(a,0)$，点 A 的坐标为 $(b\cos C, b\sin C)$，根据两点间距离公式，

$$AB=\sqrt{(b\cos C-a)^2+(b\sin C-0)^2},$$
$$c^2=b^2\cos^2 C-2ab\cos C+a^2+b^2\sin^2 C,$$

整理得：

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

同理可以证明：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

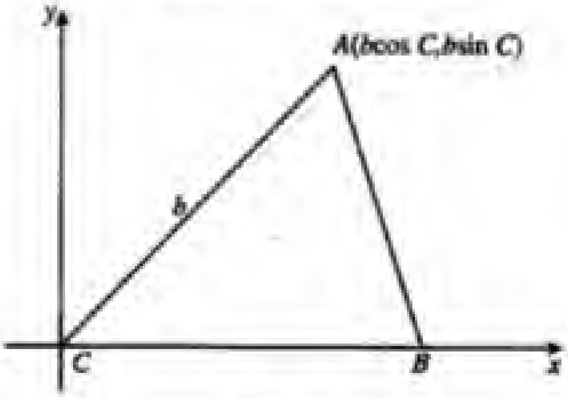


图 1-2

也可以用三角方法证明余弦定理. 当三角形是锐角三角形时，证明过程如下：

如图 1-3，$AD=b\sin C$，$BD=BC-CD=a-b\cos C$，在 Rt$\triangle ABD$ 中，根据勾股定理，

$$AB^2=AD^2+BD^2=(b\sin C)^2+(a-b\cos C)^2$$

整理可得：

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

当三角形是钝角三角形时，可以证明如下：

如图 1-4，$AD=b\sin C$，$BD=CD-BC=b\cos C-a$，在 Rt$\triangle ABD$ 中，根据勾股定理，

$$AB^2=AD^2+BD^2=(b\sin C)^2+(b\cos C-a)^2$$

整理可得：

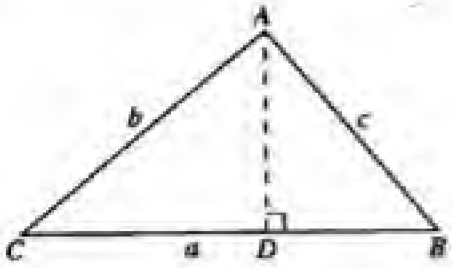


图 1-3

图 1-4

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

另外的两个等式可以类似证明.

2. 余弦定理指出了三角形的三条边与其中的一个角之间的关系，每一个等式中都包含四个不同的量，它们分别是三角形的三边和一个角，知道其中的三个量，就可以求得第四个量. 从已知三角形的三边确定三角形的角，这就是余弦定理的推论，也可以说是余弦定理的第二种形式：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

3. 应用余弦定理及其推论，并结合正弦定理，可以解决的解三角形问题有：

(1) 已知两边和它们的夹角解三角形；

(2) 已知三角形的三边解三角形.

教科书中的例 3 和例 4 说明了余弦定理及其推论并结合正弦定理，可以解决的解三角形问题. 在已知两边和及其夹角解三角形时，可以用余弦定理求出第三条边，这样就把问题转化成已知三边解三角形的问题. 在已知三边和一个角的情况下，求另一个角既可以应用余弦定理的推论，也可以用正弦定理. 用余弦定理的推论，可以根据角的余弦值直接判断角是锐角还是钝角，但计算比较复杂. 用正弦定理计算相对比较简单，但仍要根据已知条件中边的大小来确定角的大小，所以一般应该选择用正弦去计算比较小的边所对的角，以避免作进一步的讨论.

在本章中，复杂的计算是借助计算器计算的. 当使用计算器时，约定当计算器所示的三角函数值是准确数时用等号，当取其近似值时，相应的运算结果用约等号，但一般的代数运算结果按通常的运算规则，是近似值时用约等号.

4. 在本节的教学中，应该注意与本节内容相关的数学思想的教学.

数学思想是对于数学知识（数学中的概念、法则、性质、公式、公理、定理、方法等）的理性的、本质的、高度抽象和概括的认识，带有普遍的指导意义，蕴涵于运用数学方法分析、处理和解决数学问题的过程之中. 数学方法是研究或解决数学问题并使之达到目的的手段、方式、途径或程序. 数学思想方法的教学是中学数学教学中的重要组成部分，有利于学生加深对于具体数学知识的理解和掌握.

本章的主要数学结论是正弦定理和余弦定理，它们都是关于三角形的边角关系的结论. 在初中，学生已经学习了相关边角关系的定性的结果，就是“在任意三角形中大边对大角，小边对小角”，“如果已知两个三角形的两条对应边及其所夹的角相等，那么这两个三角形全等”，这里，则是对于问题作进一步的定量研究. 对于这两个问题的定量的研究就是，“在一个三角形中，如果已知三边，三条已知长度的边分别会对应多大的角?”“在一个三角形中，如果已知两边及其所夹的角，怎样求出三角形其余的边和角的大小?”，对于这两个问题的研究，发展成本章的正弦定理和余弦定理，得到可以进行计算的公式. 教科书在引入正弦定理内容时，让学生从已有的几何知识出发，提出探究性问题：“在任意

三角形中有大边对大角，小边对小角的边角关系．我们是否能得到这个边、角的关系准确量化的表示呢?”，在引入余弦定理内容时，提出探究性问题“如果已知三角形的两条边及其所夹的角，根据三角形全等的判定方法，这个三角形是大小、形状完全确定的三角形．我们仍然从量化的角度来研究这个问题，也就是研究如何从已知的两边和它们的夹角计算出三角形的另一边和两个角的问题．”在这里，体现了量化的数学思想．

四、教学设计案例

1.1.2 余弦定理（约2课时）

（一）教学任务分析

1．通过对三角形边角关系的探索，能证明余弦定理，了解可以从向量、解析方法和三角方法等多种途径证明余弦定理；

2．能够从余弦定理得到它的推论；

3．能够应用余弦定理及其推论解三角形；

4．了解余弦定理与勾股定理之间的联系，知道解三角形的问题的几种情形及其基本解法．

（二）教学重点和难点

重点：通过对三角形边角关系的探索，证明余弦定理及其推论，并能应用它们解三角形．

难点：在解三角形中两个定理的选择．

（三）教学基本流程

第1课时　余弦定理的证明及其应用

1．从三角形全等的“边、角、边”判定方法引入问题：如何用已知的两条边及其所夹的角来表示第三条边．

2．余弦定理的证明：启发学生从不同的角度得到余弦定理的证明，或引导学生自己探索获得定理的证明．

3．讨论余弦定理与勾股定理之间的联系．

4．应用余弦定理解三角形，以例3为例题．学生完成练习（第8页练习1）．

第2课时　余弦定理的推论

1．从余弦定理推导出余弦定理的推论．

2．应用余弦定理的推论解三角形，以例4为例题．学生完成教科书第8页练习第2题．

3．讨论解三角形的问题可以分为几种类型．

4．如果时间允许，可以让学生完成“探究与发现：解三角形的进一步讨论”．

（四）教学情景设计

第1课时　余弦定理的证明及其应用

问题1：如果已知一个三角形的两条边及其所夹的角，根据三角形全等的判定方法，这个三角形是大小、形状完全确定的三角形．怎样在这样的已知三角形的两边及其夹角的条件下解出三角形呢?

设计意图：把研究余弦定理的问题和平面几何中三角形全等判定的方法建立联系，沟通新旧知识

的联系，引导学生体会量化的思想和观点.

师生活动：用数学符号来表达上述数学问题：如果已知三角形的两边 $BC=a$，$AC=b$，和角 C，如何解出 c，B，A？

问题 2：可以先研究计算出第三边的长 c 的问题．我们可以从哪些角度来研究这个问题，得到一个关系式或计算公式呢？

设计意图：期望能引导学生从各个不同的方面（如从坐标方法，或向量方法，或三角方法）去研究、探索得到余弦定理.

师生活动：从某一个角度探索并得出余弦定理.

问题 3：余弦定理与以前的关于三角形的什么定理在形式上非常接近？

设计意图：引入余弦定理和勾股定理的比较、联系的讨论.

师生活动：就三种不同情形研究两个定理之间的联系.

第 2 课时　余弦定理的推论

问题 1：我们得到的余弦定理是关于三角形三边和一个角的一个关系式．把这个关系式作某些变形，是否可以解决其他类型的解三角形问题？

设计意图：(1) 引入余弦定理的推论；(2) 对一个数学关系式作某种变形，从而得到解决其他类型的数学问题，这是一种基本的研究问题的方法.

师生活动：对余弦定理作某些变形，研究变形后所得关系式的应用．老师应把重点引导到余弦定理的推论上去，即讨论已知三边求角的问题.

问题 2：在解三角形的过程中，求某一个角时既可以用余弦定理也可以用正弦定理，两种方法有什么利弊呢？

设计意图：引导学生对应用两个定理的差异进行思考和探究．问题涉及到正弦函数和余弦函数在 $(0, \pi)$ 上的单调性.

师生活动：考察两种方法在解决不同问题时的差异．当所求的角是钝角时，用余弦定理可以立即判定所求的角，但用正弦定理则不能直接判定.

问题 3：应用正弦定理和余弦定理可以解决哪些类型的解三角形问题？怎样求解？

设计意图：引导学生就解三角形问题作一分析、归纳和总结.

师生活动：可以一起总结得到以下几种类型：

(1) 已知三角形的两边和其中一边所对的角时，应用正弦定理求出另一边所对的角．应用三角形内角和定理求第三个角，再用正弦定理求出第三条边；

(2) 已知三角形的两个角和其中一个角所对的边时，可应用三角形内角和定理求出三角形的第三个角，再应用正弦定理求出另两条边；

(3) 已知两边和它们的夹角时，可以应用余弦定理求出第三条边．并把问题转化到前面的类型.

(4) 已知三角形的三条边时，应用余弦定理的推论求出一个角，并把问题转化到前面的类型.

五、习题解答

练习（第5页）

1. (1) $a\approx14$，$b\approx19$，$B=105^\circ$；

(2) $a\approx18$ cm，$b\approx15$ cm，$C=75^\circ$.

2. (1) $A\approx65^\circ$，$C\approx85^\circ$，$c\approx22$；或 $A\approx115^\circ$，$C\approx35^\circ$，$c\approx13$；

(2) $B\approx41^\circ$，$A\approx24^\circ$，$a\approx24$.

练习（第8页）

1. (1) $A\approx39.6^\circ$，$B\approx58.2^\circ$，$c\approx4.2$ cm；

(2) $B\approx55.8^\circ$，$C\approx81.9^\circ$，$a\approx10.5$ cm.

2. (1) $A\approx43.5^\circ$，$B\approx100.3^\circ$，$C\approx36.2^\circ$；

(2) $A\approx24.7^\circ$，$B\approx44.9^\circ$，$C\approx110.4^\circ$.

习题1.1（第13页）

A组

1. (1) $a\approx38$ cm，$b\approx39$ cm，$B\approx80^\circ$；

(2) $a\approx38$ cm，$b\approx56$ cm，$C=90^\circ$.

2. (1) $A\approx114^\circ$，$B\approx43^\circ$，$a\approx35$ cm；$A\approx20^\circ$，$B\approx137^\circ$，$a\approx13$ cm；

(2) $B\approx35^\circ$，$C\approx85^\circ$，$c\approx17$ cm；

(3) $A\approx97^\circ$，$B\approx58^\circ$，$a\approx47$ cm；$A\approx33^\circ$，$B\approx122^\circ$，$a\approx26$ cm.

3. (1) $A\approx49^\circ$，$B\approx24^\circ$，$c\approx62$ cm；

(2) $A\approx59^\circ$，$C\approx55^\circ$，$b\approx62$ cm；

(3) $B\approx36^\circ$，$C\approx38^\circ$，$a\approx62$ cm.

4. (1) $A=36^\circ$，$B=40^\circ$，$C=104^\circ$；

(2) $A=48^\circ$，$B=93^\circ$，$C=39^\circ$.

B组

1. 证明：根据正弦定理，可设

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k,$$

则

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{c}&=\frac{k\sin A+k\sin B}{k\sin C}\\&=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}\\&=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{k\sin A-k\sin B}{k\sin C}$$

$$=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$$

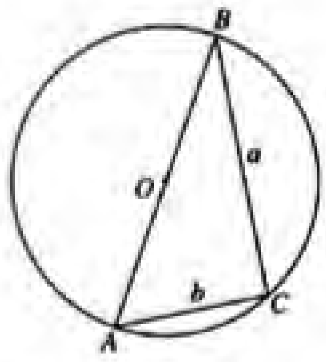
$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

2. 证明：如图 1，设$\triangle ABC$的外接圆的半径是R. 当$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle C=90^\circ$时，$\triangle ABC$的外接圆的圆心O在$Rt\triangle ABC$的斜边AB上. 在$Rt\triangle ABC$中，$\frac{BC}{AB}=\sin A$，$\frac{AC}{AB}=\sin B$，



（第 2 题图 1）

即

$$\frac{a}{2R}=\sin A,\ \frac{b}{2R}=\sin B,$$

所以

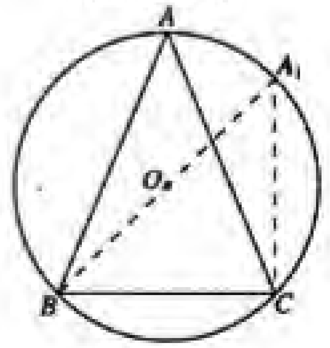
$$a=2R\sin A,$$
$$b=2R\sin B.$$

又

$$c=2R=2R\cdot\sin 90^\circ=2R\sin C.$$

所以，

$$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C.$$



（第 2 题图 2）

当$\triangle ABC$是锐角三角形时，它的外接圆的圆心O在三角形内（图 2），作过O、B的直径A_1B，联结A_1C，则$\triangle A_1BC$是直角三角形，$\angle A_1CB=90^\circ$，$\angle BAC=\angle BA_1C$. 在$Rt\triangle A_1BC$中，

$$\frac{BC}{A_1B}=\sin\angle BA_1C,$$

即

$$\frac{a}{2R}=\sin\angle BA_1C=\sin A.$$

所以，

$$a=2R\sin A.$$

同理，

$$b=2R\sin B,\ c=2R\sin C.$$

当$\triangle ABC$是钝角三角形时，不妨设$\angle A$为钝角，它的外接圆的圆心O在$\triangle ABC$外（图3）. 作过O，B的直径A_1B，联结A_1C. 则$\triangle A_1CB$是直角三角形，$\angle A_1CB=90°$，$\angle BA_1C=180°-\angle BAC$. 在$\mathrm{Rt}\triangle A_1BC$中，

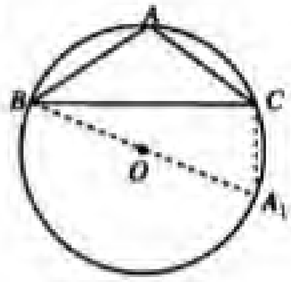
$$BC=2R\sin\angle BA_1C,$$

即

$$a=2R\sin(180°-\angle BAC),$$

即

$$a=2R\sin A.$$



（第2题图3）

类似可证，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

综上，对任意三角形$\triangle ABC$，如果它的外接圆半径等于R，则$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

3. 因为

$$a\cos A=b\cos B,$$

所以

$$\sin A\cos A=\sin B\cos B,$$
$$\sin 2A=\sin 2B,$$

因为

$$0<2A,\ 2B<2\pi,$$

所以，

$$2A=2B,\ 或\ 2A=\pi-2B,\ 或\ 2A-\pi=2\pi-2B.$$

即

$$A=B,\ 或\ A+B=\frac{\pi}{2},$$

所以，三角形是等腰三角形，或是直角三角形.

在得到$\sin 2A=\sin 2B$后，也可以化成

$$\sin 2A-\sin 2B=0,$$

所以，

$$\cos(A+B)\sin(A-B)=0,$$
$$A+B=\frac{\pi}{2},\ 或\ A-B=0,$$

即

$$A+B=\frac{\pi}{2},\ 或\ A=B.$$

得到问题的结论.

1.2 应用举例

一、本节知识结构

二、教学重点与难点

本节的教学重点是应用正弦定理和余弦定理解决一些有关的实际问题.

三、编写意图与教学建议

本节主要介绍正弦定理和余弦定理在实际测量中的应用，约需4课时，建议用1课时解决有关测量距离的问题，用1课时解决有关测量高度的问题，用1课时解决有关测量角度的问题，再用1课时解决有关三角形的计算问题.

1. 对于未知的距离、高度等，存在着许多可以供选择的测量方案，可以应用全等三角形的方法，也可以应用相似三角形的方法，或借助解直角三角形的方法，以及在本节介绍的应用两个定理的方法，等等. 但是，在测量问题的实际背景下，某些方法也许不能实施，如因为没有足够的空间，不能用全等三角形的方法来测量，因此，一种方法会有其局限性. 这里介绍的许多问题是用以前的方法所不能解决的.

2. 本节的例1和例2是两个有关测量距离的问题. 例1是测量从一个可到达的点到一个不可到达的点之间的距离的问题，例2是测量两个不可到达的点之间距离的问题. 在例1的教学中，要引导学生分析，这个问题实际上就是已知三角形两个角和一边解三角形的问题，从而得到用正弦定理去解的方法. 在例2的求找测量方法的过程中，可以用分析的方法，首先把求不可到达的两点A、B之间的距离转化为应用余弦定理求三角形的边长的问题，然后把求未知的BC和AC的问题转化为例1中测量可到达的一点与不可到达的一点之间距离的问题，这样，所要设计的测量方案就容易得到了.

例3、例4和例5是有关测量底部不可到达的建筑物等的高度的问题. 由于底部不可到达，这类问题不能直接用解直角三角形的方法去解决，但常常用正弦定理和余弦定理计算出建筑物顶部或底部到一个可到达的点之间的距离，然后转化为解直角三角形的问题. 在例3中是测出一点C到建筑物的顶部A的距离CA，并测出点C观察A的仰角；在例4中是计算出AB的长；在例5中是计算出BC的长，然后转化为解直角三角形的问题.

例6是一个有关测量角度的问题.

关于三角形的有关几何计算，教科书涉及了三角形的高和面积的问题. 教科书直接给出了计算三角形的高的公式，

$$h_a=b\sin C=c\sin B,$$
$$h_b=c\sin A=a\sin C,$$
$$h_c=a\sin B=b\sin A.$$

这三个公式实际上在正弦定理的证明过程中就已经得到．教科书证明了已知三角形的两边及其夹角时的面积公式．

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

本节的例 7 和例 8 说明了在不同已知条件下三角形面积问题的常见解法．在不同已知条件下求三角形面积的问题，与解三角形有密切的关系，我们可以应用解三角形的知识，求出需要的元素，从而求出三角形的面积．已知三角形的三边求三角形面积在历史上是一个重要的问题，在西方有海伦公式，在我国数学史上有秦九韶的“三斜求积公式”，教科书在阅读与思考中对此作了介绍，在习题中要求学生加以证明．

例 9 是关于三角形边角关系恒等式的证明问题，课程标准要求不在这类问题上作过于繁琐的训练，教科书例题限于直接用正弦定理和余弦定理可以证明的问题．

四、教学设计案例

应用举例第 1 课时：距离测量问题

（一）教学任务分析

能够运用正弦定理和余弦定理等解三角形知识，解决不可到达点的距离测量问题．

距离测量问题是基本的测量问题，在初中曾经学习应用全等三角形、相似三角形和解直角三角形的知识进行距离测量．这里涉及的测量问题则是不可到达点的测距问题，在教学中要让学生认识问题的差异，进而寻求解决测量问题的方法．在某些问题中只要求得到能够实施的测量方法．

（二）教学重点

重点：分析测量问题的实际情景，从而找到测量距离的方法．

（三）教学基本流程

1. 简单复习正弦定理与余弦定理．

2. 引入课题：这节讨论测量问题中距离测量问题．回忆复习过去的一些测量距离的方法：初中曾经学习应用全等三角形、相似三角形和解直角三角形的知识进行距离测量方法，说明这些方法的局限性．某些问题不能应用这些方法解决．

3. 例 1 和例 2 的教学．

4. 练习．

（四）教学情境设计

问题 1：我们在初中已经学习哪些测量距离的方法？

设计意图：引导学生回忆复习已经学习的一些测量距离方法：应用全等三角形、相似三角形和解直角三角形的知识进行距离测量的方法．让学生扼要说明这些测量距离的具体操作方法．

师生活动：可以画出测量方法的简明示意图．老师可以指出这些方法的一些局限．

问题 2：对于例 1 的实际情景作一分析，研究例 1 中已知条件在实际测量中的意义.

设计意图：例 1 中的已知条件实际上说明了测量不可到达点的距离的一种方法，让学生想象实际可能的测量条件限制（例如基线 AC 实际上可能在一条易于实施测量的道路上，而近旁则不宜实施测量，例如水田、建筑的限制等）.

师生活动：研究这个测量问题在不同实际情景下（较少条件限制时）可以采用的测量方案，以及在特定条件限制下可以采用的例 1 中的方法.

问题 3：从例题 1 的实际情景发展到例 2 的实际情景，研究如何测量两个不可到达点之间距离的测量问题.

设计意图：通过例 1，学生能够解决从一个可到达的点与一个可到达的点之间的距离测量问题，例 2 则是在此基础上，解决测量两个不可到达点的距离的问题. 两个问题是有联系的. 通过分析，让学生得到测量的方法.

师生活动：分析研究如何得到测量的方法，关键在于把未知的条件转化成可以测量的距离.

问题 4：我们学习的这些测量距离的方法在实际中有什么应用呢？

设计意图：让学生了解所学知识在实际生产、生活和科学技术中的应用.

师生活动：老师以教科书中测量地球与月球之间距离的问题为例，师生可另外举出一些实际例子，说明测量知识的应用，认识学习知识的意义.

五、习题解答

练习（第 17 页）

1. 在 $\triangle ABS$ 中，$AB=32.2\times0.5=16.1$ n mile，$\angle ABS=115^\circ$，根据正弦定理，$\dfrac{AS}{\sin\angle ABS}=\dfrac{AB}{\sin(65^\circ-20^\circ)}$，

$$AS=\frac{AB\times\sin B}{\sin(65^\circ-20^\circ)}=AB\times\sin\angle ABS\times\sqrt{2}=16.1\times\sin 115^\circ\times\sqrt{2},$$

S 到直线 AB 的距离是

$$d=AS\times\sin 20^\circ=16.1\times\sin 115^\circ\times\sqrt{2}\times\sin 20^\circ\approx7.06\ (\text{cm}).$$

所以这艘船可以继续沿正北方向航行.

2. 顶杆的长约长 1.89 m.

练习（第 18 页）

1. 在$\triangle ABP$ 中，

$$\begin{aligned}\angle ABP&=180^\circ-\gamma+\beta,\\ \angle BPA&=180^\circ-(\alpha-\beta)-\angle ABP\\ &=180^\circ-(\alpha-\beta)-(180^\circ-\gamma+\beta)\\ &=\gamma-\alpha,\end{aligned}$$

在$\triangle ABP$ 中，根据正弦定理，

$$\frac{AP}{\sin\angle ABP}=\frac{AB}{\sin\angle APB},$$

$$\frac{AP}{\sin(180^\circ-\gamma+\beta)}=\frac{a}{\sin(\gamma-\alpha)},$$

$$AP=\frac{a\times\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$$

所以山高为

$$h=AP\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}.$$

2. 在$\triangle ABC$中，$AC=65.3$ m，$\angle BAC=\alpha-\beta=25°25'-17°38'=7°47'$，$\angle ABC=90°-\beta=90°-17°38'=72°22'$，根据正弦定理，

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC},$$

$$BC=\frac{AC\times\sin\angle BAC}{\sin\angle ABC}=\frac{65.3\sin 7°47'}{\sin 72°22'}\approx 9.3\ (\text{m}).$$

井架的高约 9.3 m.

3. 山的高度为$\frac{200\times\sin 38°\sin 29°}{\sin 7°}\approx 490$ m.

4. 约 116.23°.

练习（第 21 页）

1. (1) 约 168.52 cm²，(2) 约 121.75 cm²，(3) 约 425.39 cm².

2. 约 4 476.40 m².

3. (1) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$.

(本题结论称为正切定理)

(2) 右边$=b\cos C+c\cos B=b\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2}{2a}=a=\text{左边}.$$

类似可以证明另外两个等式.

(本题的结论称为射影定理)

习题 1.2

A 组

1. 在$\triangle ABC$中，$BC=35\times0.5=17.5$ n mile，$\angle ABC=148°-126°=12°$，
$\angle ACB=78°+(180°-148°)=110°$，$\angle BAC=180°-110°-12°=58°$，
根据正弦定理，

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC},$$

$$AC=\frac{BC\times\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}=\frac{17.5\times\sin 12°}{\sin 58°}\approx 4.29\ (\text{n mile}).$$

货轮到达 C 点时与灯塔的距离是约 4.29 n mile.

2. 70 n mile.

3. 在$\triangle BCD$中，

$$\angle BCD=30°+10°=40°,$$
$$\angle BDC=180°-\angle ADB=180°-45°-10°=125°,$$

$$CD=30\times\frac{1}{3}=10\ (\text{n mile}).$$

根据正弦定理，

$$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{\sin\angle BCD},$$

$$\frac{10}{\sin\angle(180^\circ-40^\circ-125^\circ)}=\frac{BD}{\sin 40^\circ},$$

$$BD=\frac{10\times\sin 40^\circ}{\sin 15^\circ}.$$

在$\triangle ABD$中，

$$\angle ADB=45^\circ+10^\circ=55^\circ,$$

$$\angle BAD=180^\circ-60^\circ-10^\circ=110^\circ,$$

$$\angle ABD=180^\circ-110^\circ-55^\circ=15^\circ.$$

根据正弦定理，

$$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB},$$

就是

$$\frac{AD}{\sin 15^\circ}=\frac{BD}{\sin 110^\circ}=\frac{AB}{\sin 55^\circ},$$

$$AD=\frac{BD\times\sin 15^\circ}{\sin 110^\circ}=\frac{10\times\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\approx 6.84\ (\text{n mile}),$$

$$AB=\frac{BD\times\sin 55^\circ}{\sin 110^\circ}=\frac{10\times\sin 40^\circ\times\sin 55^\circ}{\sin 15^\circ\times\sin 70^\circ}\approx 21.65\ (\text{n mile}).$$

如果一切正常，此船从C开始到B所需要的时间为：

$$20+\frac{AD+AB}{30}\times 60+10\approx 30+\frac{6.84+21.65}{30}\times 60\approx 86.98\ (\text{min})$$

即约1小时26分59秒. 所以此船约在11时27分到达B岛.

4. 约5 821.71 m.

5. 在$\triangle ABC$中，$AB=700$ km，$\angle ACB=180^\circ-21^\circ-35^\circ=124^\circ$，

根据正弦定理，

$$\frac{700}{\sin 124^\circ}=\frac{AC}{\sin 35^\circ}=\frac{BC}{\sin 21^\circ},$$

$$AC=\frac{700\times\sin 35^\circ}{\sin 124^\circ},$$

$$BC=\frac{700\times\sin 21^\circ}{\sin 124^\circ},$$

$$AC+BC=\frac{700\times\sin 35^\circ}{\sin 124^\circ}+\frac{700\times\sin 21^\circ}{\sin 124^\circ}\approx 786.89(\text{km}).$$

所以路程比原来远了约86.89 km.

6. 飞机离A处探照灯的距离是4 801.53 m，飞机离B处探照灯的距离是4 704.21 m，飞机的高度是约4 574.23 m.

7. 飞机在150秒内飞行的距离是$d=1\ 000\times 1\ 000\times\frac{150}{3\ 600}$ m，

根据正弦定理，

$$\frac{d}{\sin(81^\circ-18.5^\circ)}=\frac{x}{\sin 18.5^\circ},$$

这里 x 是飞机看到山顶的俯角为 81° 时飞机与山顶的距离. 飞机与山顶的海拔的差是:

$$x\times\tan 81^\circ=\frac{d\times\sin 18.5^\circ}{\sin(81^\circ-18.5^\circ)}\times\tan 81^\circ\approx 14\ 721.64\ (\text{m}),$$

山顶的海拔是

$$20\ 250-14\ 721.64\approx 5\ 528\ \text{m}.$$

8. 在 $\triangle ABT$ 中, $\angle ATB=21.4^\circ-18.6^\circ=2.8^\circ$, $\angle ABT=90^\circ+18.6^\circ$, $AB=15$ (m),
根据正弦定理,

$$\frac{AB}{\sin 2.8^\circ}=\frac{AT}{\cos 18.6^\circ},$$

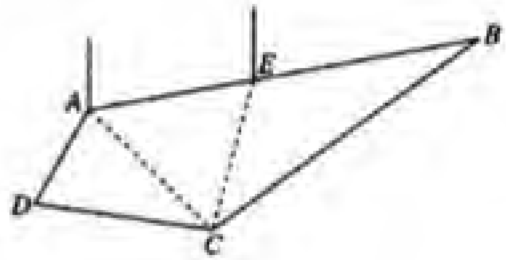
$$AT=\frac{15\times\cos 18.6^\circ}{\sin 2.8^\circ}.$$

塔的高度为

$$AT\times\tan 21.4^\circ=\frac{15\times\cos 18.6^\circ}{\sin 2.8^\circ}\times\tan 21.4^\circ\approx 114.05\ (\text{m}).$$

9. 约 10 891 m.

10. $AE=\frac{326\times 18}{60}=97.8$ km,



(第 10 题)

在 $\triangle ACD$ 中, 根据余弦定理:

$$\begin{aligned}AC&=\sqrt{AD^2+CD^2-2\times AD\times CD\times\cos 66^\circ}\\&=\sqrt{57^2+110^2-2\times 57\times 110\times\cos 66^\circ}\\&=101.235\end{aligned}$$

根据正弦定理:

$$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC},$$

$$\sin\angle ACD=\frac{AD\times\sin\angle ADC}{AC}=\frac{57\times\sin 66^\circ}{101.235}\approx 0.514\ 4,$$

$$\angle ACD\approx 30.96^\circ,$$

$$\angle ACB\approx 133^\circ-30.96^\circ=102.04^\circ,$$

在 $\triangle ABC$ 中, 根据余弦定理:

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos\angle ACB}\\&=\sqrt{101.235^2+204^2-2\times 101.235\times 204\times\cos 102.04^\circ}\\&\approx 245.93,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\angle BAC&=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\times AB\times AC}\\&=\frac{245.93^2+101.235^2-204^2}{2\times 245.93\times 101.235}\approx 0.584\ 7,\end{aligned}$$

$\angle BAC=54.21^\circ$.

在 $\triangle ACE$ 中, 根据余弦定理:

$$\begin{aligned}CE&=\sqrt{AC^2+AE^2-2\times AC\times AE\times\cos\angle EAC}\\&=\sqrt{101.235^2+97.8^2-2\times 101.235\times 97.8\times 0.548\ 7}\\&\approx 90.75,\end{aligned}$$

$$\cos\angle AEC=\frac{AE^2+EC^2-AC^2}{2\times AE\times EC}$$

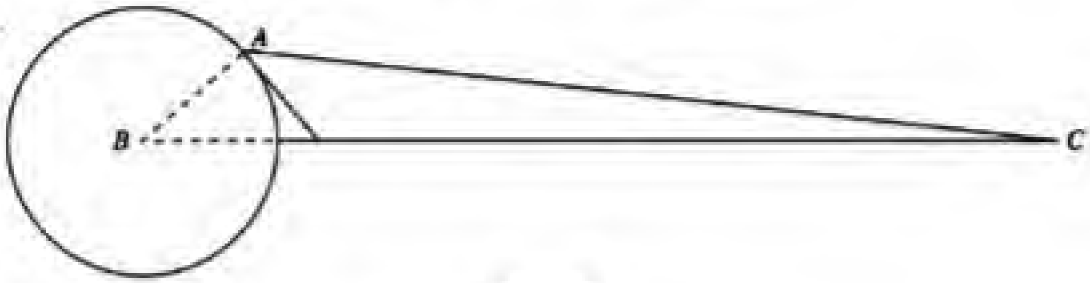
$$\approx\frac{97.8^2+90.75^2-101.235^2}{2\times97.8\times90.75}\approx0.425\ 4,$$

$\angle AEC=64.82^\circ$,

$180^\circ-\angle AEC-(180^\circ-75^\circ)=75^\circ-64.82^\circ=10.18^\circ$,

所以，飞机应该以南偏西 10.18°的方向飞行，飞行距离约 90.75 km.

11.



（第 11 题）

如图，在$\triangle ABC$中，根据余弦定理：

$$\begin{aligned}AC&=\sqrt{BC^2+AB^2-2\times AB\times BC\times\cos 39^\circ54'}\\&=\sqrt{(6\ 400+35\ 800)^2+6\ 400^2-2\times42\ 200\times6\ 400\times\cos 39^\circ54'}\\&=\sqrt{42\ 200^2+6\ 400^2-2\times42\ 200\times6\ 400\times\cos 39^\circ54'}\\&=37\ 515.44\ (\text{km}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\angle BAC&=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\times AB\times AC}\\&\approx\frac{6\ 400^2+37\ 515.44^2-42\ 200^2}{2\times6\ 400\times37\ 515.44}\approx-0.692\ 4,\end{aligned}$$

$\angle BAC\approx133.82^\circ$,

$\angle BAC-90^\circ\approx43.82^\circ$.

仰角为 43.82°.

12. (1) $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times28\times33\times\sin 45^\circ\approx326.68(\text{cm}^2)$;

(2) 根据正弦定理：

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

$c=\frac{a}{\sin A}\times\sin C=\frac{36}{\sin 32.8^\circ}\times\sin 66.5^\circ$,

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times36^2\times\frac{\sin 66.5^\circ}{\sin 32.8^\circ}\times\sin(32.8^\circ+66.5^\circ)\approx1\ 082.58(\text{cm}^2)$.

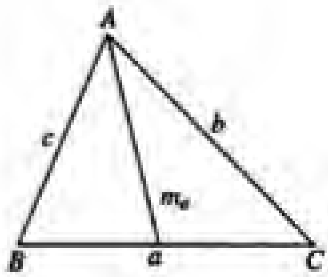
(3) 约为 1 597.94 cm².

13. $\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

14. 根据余弦定理，

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

所以



（第 14 题）

$$m_a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+c^2-2\times\frac{a}{2}\times c\times\cos B$$

$$=\left(\frac{a}{2}\right)^2+c^2-a\times c\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2[a^2+4c^2-2(a^2+c^2-b^2)]$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2[2(b^2+c^2)-a^2],$$

所以

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

同理，

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2},$$
$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

15. 根据余弦定理的推论，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

所以，

$$\text{左边}=c(a\cos B-b\cos A)$$
$$=c\left(a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$=c\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(2a^2-2b^2)=\text{右边}.$$

B 组

1. 根据正弦定理，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

所以

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},$$

代入三角形面积公式得

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a\times\frac{a\sin B}{\sin A}\times\sin C=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}.$$

2. (1) 根据余弦定理的推论，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

由同角三角函数之间的关系，

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2},$$

代入

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

得

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},\end{aligned}$$

记 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则可得到

$$\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a,$$

$$\frac{1}{2}(c+a-b)=p-b,$$

$$\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c.$$

代入可证得公式.

（2）三角形的面积 S 与三角形内切圆半径 r 之间有关系式

$$S=\frac{1}{2}\times 2p\times r=pr$$

其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，所以

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

（3）根据三角形面积公式

$$S=\frac{1}{2}\times a\times h_a,$$

所以，

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-a)(p-a)},$$

即

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-a)(p-a)},$$

同理，

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-a)(p-a)},$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-a)(p-a)}.$$

1.3 实习作业

本小节安排了一个实习作业，目的是让学生进一步巩固所学的知识，提高学生分析问题和解决实

际问题的能力、动手操作的能力以及用数学语言表达实习过程和实习结果能力，增强学生应用数学的意识.

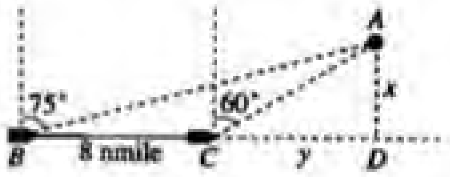
在做实习作业之前，应该要求学生准备好测量工具，如经纬仪和钢卷尺或皮尺等. 教师要注意对于实习作业的指导，要注意对于实际测量问题的选择，及时纠正实际操作中的错误，解决测量中出现的一些问题. 对于实习作业，要求写出实习报告.

复习参考题（第 28 页）解答

A 组

1. (1) $B\approx 21^\circ 9'$, $C\approx 38^\circ 51'$, $c\approx 8.69$ cm;
   (2) $B\approx 41^\circ 49'$, $C\approx 108^\circ 11'$, $c\approx 11.4$ cm;
   或 $B\approx 138^\circ 11'$, $C\approx 11^\circ 49'$, $c\approx 2.46$ cm;
   (3) $A\approx 11^\circ 2'$, $B\approx 38^\circ 58'$, $c\approx 28.02$ cm;
   (4) $B\approx 20^\circ 30'$, $C\approx 14^\circ 30'$, $a\approx 22.92$ cm;
   (5) $A\approx 16^\circ 20'$, $C\approx 11^\circ 40'$, $b\approx 53.41$ cm;
   (6) $A=28^\circ 57'$, $B=46^\circ 34'$, $C=104^\circ 29'$;
   (7) $A=53^\circ 35'$, $B=13^\circ 18'$, $C=113^\circ 7'$.

2. 解法 1：设海轮在 B 处望见小岛在北偏东 75°，在 C 处望见小岛在北偏东 60°，从小岛 A 向海轮的航线 BD 作垂线，垂线段 AD 的长度为 x n mile，CD 为 y n mile. 则



（第 2 题）

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\tan 30^\circ,\\[2mm] \dfrac{x}{y+8}=\tan 15^\circ,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\tan 30^\circ}=y,\\[2mm] \dfrac{x}{\tan 15^\circ}=y+8,\end{cases}$$

$$\frac{x}{\tan 30^\circ}=\frac{x}{\tan 15^\circ}-8,$$

$$x=\frac{8\tan 15^\circ\tan 30^\circ}{\tan 30^\circ-\tan 15^\circ}=4,$$

所以，这艘海轮不改变航向继续前进没有触礁的危险.

解法 2：设海轮在 B 处望见小岛在北偏东 75°，在 C 处望见小岛在北偏东 60°，从小岛 A 向海轮的航线 BD 作垂线段 AD. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ-75^\circ=15^\circ$，$\angle ACB=90^\circ+60^\circ=150^\circ$，$\angle BAC=180^\circ-15^\circ-150^\circ=15^\circ=\angle ABC$. 所以，$AC=BC=8$ n mile.

$$AD=8\times\sin 30^\circ=4(\text{n mile}).$$

所以，这艘海轮不改变航向继续前进没有触礁的危险.

3. 根据余弦定理

$$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha,$$

所以

$$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}.$$

$$\cos B=\frac{a^2+AB^2-b^2}{2\times a\times AB}$$

$$=\frac{a^2+a^2+b^2-2ab\cos\alpha-b^2}{2\times a\times\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$$

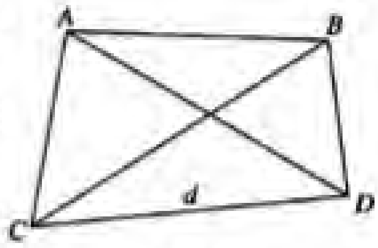
$$=\frac{a-b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}},$$

从$\angle B$的余弦值可以确定它的大小.

类似地，可以得到下面的值，从而确定$\angle A$的大小.

$$\cos A=\frac{b-a\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}.$$

4. 如图，C，D是两个观测点，C到D的距离是d，航船在时刻t_1在A处，以从A到B的航向航行，在此时测出$\angle ACD$和$\angle CDA$. 在时刻t_2，航船航行到B处，此时，测出$\angle CDB$和$\angle BCD$. 根据正弦定理，在$\triangle BCD$中，可以计算出BC的长，在$\triangle ACD$中，可以计算出AC的长. 在$\triangle ACB$中，AC、BC已经算出，$\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD$，解$\triangle ACD$，求出$AB$的长，即航船航行的距离，算出$\angle CAB$，这样就可以算出航船的航向和速度.

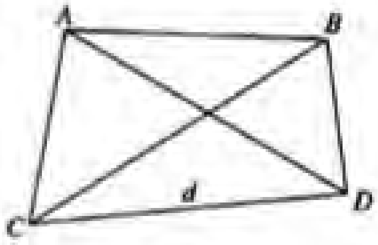


（第4题）

5. 河流宽度是$\frac{h\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

6. 47.7 m.

7. 如图A、B是已知的两个小岛，航船在时刻t_1在C处，以从C到D的航向航行，测出$\angle ACD$和$\angle BCD$. 在时刻t_2，航船航行到D处，根据时间和航船的速度，可以计算出C到D的距离d，在D处测出$\angle CDB$和$\angle CDA$，根据正弦定理，在$\triangle BCD$中，可以计算出BD的长，在$\triangle ACD$中，可以计算出AD的长. 在$\triangle ACD$中，AD、BD已经算出，$\angle ADB=\angle CDB-\angle CDA$，根据余弦定理，就可以求出$AB$的长，即两个海岛$A$、$B$之间的距离.



（第7题）

B组

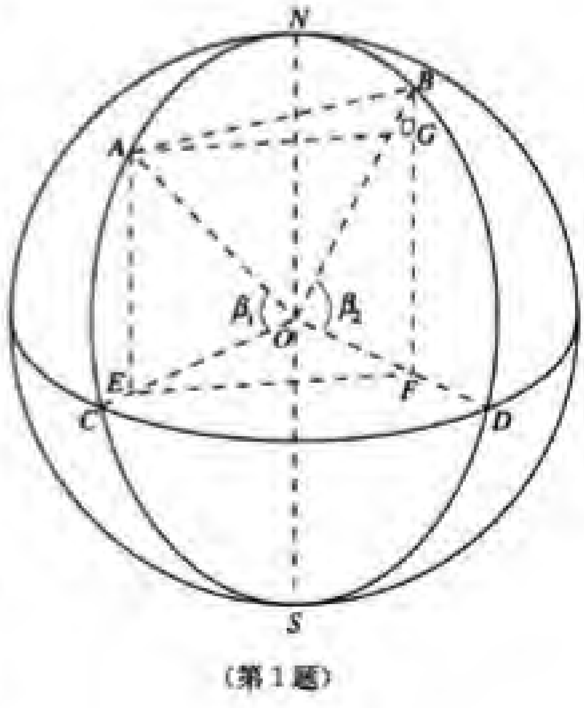
1. 如图，设$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1<\beta_2$，C是赤道上与A的经度相同的点，D是赤道上与B的经度相同的点. 地心为O. 过A作$AE\perp OC$，垂足是E. 过B作$BF\perp OD$，垂足为F. 平面$NSC\perp$平面OCD，平面$NDC\perp$平面OCD. 所以，$AE\perp$平面OCD，$BF\perp$平面OCD. 所以，$AE/\!/BF$. 作$AG\perp BF$，G为垂足，$\triangle ABG$是直角三角形. 由题意，可得

$$OE=R\cos\beta_1,$$
$$OF=R\cos\beta_2.$$

由余弦定理，

$$\begin{aligned}EF^2&=OE^2+OF^2-2\times OE\times OF\cos\angle COD\\&=(R\cos\beta_1)^2+(R\cos\beta_2)^2-2\times R\cos\beta_1\times R\cos\beta_2\\&\quad\times\cos(\alpha_2-\alpha_1)\\&=R^2[\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2-2\cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)].\end{aligned}$$

在$\mathrm{Rt}\triangle ABG$中，



（第1题）

$$AG=EF,$$
$$\begin{aligned}BG&=BF-FG\\&=BF-AE\\&=R\sin\beta_2-R\sin\beta_1\\&=R(\sin\beta_2-\sin\beta_1).\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}AB^2&=AG^2+BG^2\\&=EF^2+BG^2\\&=R^2[\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2-2\cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)\\&\quad+\sin^2\beta_1+\sin^2\beta_2-2\sin\beta_1\sin\beta_2]\\&=2R^2[1-\cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)-\sin\beta_1\sin\beta_2].\end{aligned}$$

在$\triangle OAB$中，

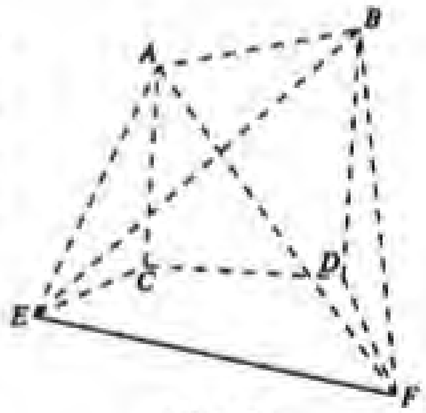
$$\begin{aligned}\cos\angle AOB&=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2\times OA\times OB}\\&=\frac{R^2+R^2-AB^2}{2R^2}\\&=\frac{2R^2[\sin\beta_1\sin\beta_2+\cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)]}{2R^2}\\&=\sin\beta_1\sin\beta_2+\cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_2-\alpha_1).\end{aligned}$$

所以，A，B两地之间的球面距离是$R\theta$，其中θ是满足

$$\cos\theta=\sin\beta_1\sin\beta_2+\cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_2-\alpha_1),$$

的$0°\sim180°$的角θ.

2. 如图，A、B是两个底部不可到达的建筑物的尖顶，在地面某点E处，测出图中$\angle AEF$，$\angle AFE$的大小，以及EF的距离. 利用正弦定理，解$\triangle AEF$，算出AE. 在$\triangle BEF$中，测出$\angle BEF$和$\angle BFE$，利用正弦定理，算出BE. 在$\triangle AEB$中，测出$\angle AEB$，利用余弦定理，算出AB的长. 本题有其他的一些测量方法.



（第2题）

3. 关于三角形的面积公式，有以下的一些公式：

（1）已知一边和边上的高：$S=\frac{1}{2}ah_a$，$S=\frac{1}{2}bh_b$，$S=\frac{1}{2}ch_c$；

（2）已知两边及其夹角：$S=\frac{1}{2}ab\sin C$，$S=\frac{1}{2}bc\sin A$，$S=\frac{1}{2}ca\sin B$；

（3）已知三边：$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，这里$p=\frac{a+b+c}{2}$；

（4）已知两角及两角的共同边：

$$S=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)},\ S=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)},\ S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.$$

（5）已知三边和外接圆半径R：$S=\frac{abc}{4R}$.

4. 设三角形三边长分别是$n-1$，n，$n+1$，三个角分别是α，$\pi-3\alpha$，2α. 由正弦定理，

$$\frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n+1}{\sin2\alpha},$$

所以，

$$\cos\alpha=\frac{n+1}{2(n-1)}.$$

由余弦定理，

$$(n-1)^2=(n+1)^2+n^2-2\times(n+1)\times n\times\cos\alpha,$$

即

$$(n-1)^2=(n+1)^2+n^2-2\times(n+1)\times n\times\frac{n+1}{2(n-1)}.$$

化简，得

$$n^2-5n=0,$$

所以，$n=0$，或 $n=5$. $n=0$ 不合题意，舍去. $n=5$. 三角形的三边分别是 4，5，6. 可以验证此三角形的最大角是最小角的 2 倍.

另解：先考虑三角形所具有的第一个性质：三边是连续的三个自然数.

(1) 三边的长不可能是 1，2，3. 这是因为 $1+2=3$，而三角形任何两边之和大于第三边.

(2) 如果三边分别是 $a=2$，$b=3$，$c=4$.

因为

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\times3\times4}=\frac{7}{8},$$

$$\cos 2A=2\cos^2A-1=2\times\left(\frac{7}{8}\right)^2-1=\frac{17}{32},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\times a\times b}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=-\frac{1}{4}.$$

在此三角形中，A 是最小角，C 是最大角，但是，

$$\cos 2A\neq\cos C,$$

所以，

$$2A\neq C.$$

边长为 2，3，4 的三角形不满足条件.

(3) 如果三边分别是 $a=3$，$b=4$，$c=5$，此三角形是直角三角形，最大角是 90°，最小角不等于 45°，此三角形不满足条件.

(4) 如果三边是 $a=4$，$b=5$，$c=6$，此时，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\times b\times c}=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=\frac{3}{4},$$

$$\cos 2A=2\cos^2A-1=\frac{1}{8},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\times a\times b}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}.$$

因为

$$\cos 2A=\cos C,\quad 而\ 0<2A,\ C<\pi,$$

所以，

$$2A=C.$$

所以，边长为 4，5，6 的三角形满足条件.

(5) 当 $n>4$，三角形的三边是 $a=n$，$b=n+1$，$c=n+2$ 时，三角形的最小角是 A，最大角是 C.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\times b\times c}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(n+1)^2+(n+2)^2-n^2}{2\times(n+1)(n+2)}\\
&=\frac{n^2+6n+5}{2(n+1)(n+2)}\\
&=\frac{n+5}{2(n+2)}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{3}{2(n+2)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\times a\times b}\\
&=\frac{n^2+(n+1)^2-(n+2)^2}{2\times n\times(n+1)}\\
&=\frac{n^2-2n-3}{2\times n\times(n+1)}\\
&=\frac{(n-3)(n+1)}{2n(n+1)}\\
&=\frac{n-3}{2n}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{3}{2n}.
\end{aligned}
$$

$\cos A$ 随 n 的增大而减小，A 随之增大，$\cos C$ 随 n 的增大而增大，C 随之变小. 由于 $n=4$ 时有 $C=2A$，所以，$n>4$ 时，不可能 $C=2A$.

综上可知，只有边长分别为 4，5，6 的三角形满足条件.

III 自我检测题

一、选择题

1. 在△ABC 中，$B=45^\circ$，$C=60^\circ$，$c=1$，则最短边的边长等于(　　)

(A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.　　(B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 在△ABC 中，$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，则△$ABC$ 一定是(　　)

(A) 直角三角形.　　(B) 钝角三角形.　　(C) 等腰三角形.　　(D) 等边三角形.

3. 在△ABC 中，$B=60^\circ$，$b^2=ac$，则△ABC 一定是(　　)

(A) 锐角三角形.　　(B) 钝角三角形.　　(C) 等腰三角形.　　(D) 等边三角形.

4. 在△ABC 中，$a=80$，$b=100$，$A=30^\circ$，则 B 的解的个数是(　　)

(A) 0 个.　　(B) 1 个.　　(C) 2 个.　　(D) 不确定的.

二、填空题

5. 在△ABC 中，已知 $b=50\sqrt{3}$，$c=150$，$B=30^\circ$，则边长 $a=$______.

6. 在钝角△ABC 中，$a=1$，$b=2$，则最大边 c 的取值范围是______.

7. 三角形的一边长为 14，这条边所对的角为 60°，另两边之比为 8∶5，则这个三角形的面积

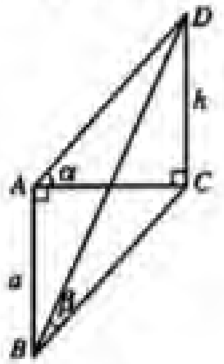
为______.

三、解答题

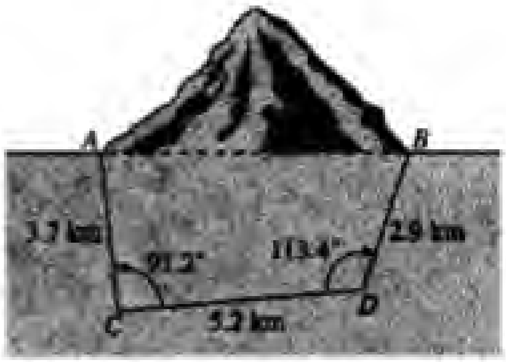
8. 一个人在建筑物的正西 A 点，测得建筑物顶的仰角是 α，这个人再从 A 点向南走到 B 点，再测得建筑物顶的仰角是 β，设 A、B 间的距离是 a，证明：建筑物的高是

$$\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}.$$

9. 工程队将从 A 到 B 修建一条隧道，测量员测得图中的一些数据（A、B、C、D 在同一水平面内），求 A、B 之间的距离.



（第 8 题）



（第 9 题）

评价测试题参考解答

一、选择题

1. (A).

B 最小，由正弦定理，得 $b=\frac{c}{\sin C}\cdot\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 本题考查三角形大边对大角、小边对小角，应用正弦定理解决问题的能力.

2. (D).

由 $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$ 和 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\tan A=\tan B=\tan C$，所以选 D.

3. (D).

本题考查应用余弦定理解题的能力. 根据余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，由 $B=60°$ 得：$ac=a^2+c^2-ac$. 所以 $(a-c)^2=0$. 所以 $a=c$，另外 $B=60°$，所以三角形是等边三角形.

4. (C).

本题考查已知三角形的两边和一对角时解三角形的能力.

二、填空题

5. $a=100\sqrt{3}$，或 $50\sqrt{3}$.

应用正弦定理，解三角形时对于角是钝角还是锐角需要进行讨论.

6. $\sqrt{5}<c<3$.

本题考查余弦定理. 由余弦定理 $\cos A=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5-c^2}{4}$ 及钝角 A，可得 $-1<\frac{5-c^2}{4}<0$，解得 $\sqrt{5}<c<3$. 思考：这里为什么不需要考虑三角形两边之和(差)大于(小于)第三边?

7. $40\sqrt{3}$.

本题考查通过余弦定理求边及面积公式的应用. 设另两边长为：$8x$ 与 $5x$，则 $\cos 60°=$

$\frac{64x^2+25x^2-14^2}{80x^2}$，解得 $x=2$. 两边长为 16 与 10，三角形面积为 $40\sqrt{3}$.

三、解答题

8. 本题考查解三角形. 设建筑物的高度是 h，建筑物的底部是 C，则

$$AC=\frac{h}{\tan\alpha},\ BC=\frac{h}{\tan\beta}.$$

$\triangle ABC$ 是直角三角形，BC 是斜边，所以

$$a^2+\left(\frac{h}{\tan\alpha}\right)^2=\left(\frac{h}{\tan\beta}\right)^2,$$

$$a^2=h^2\left[\left(\frac{1}{\tan\beta}\right)^2-\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned} h^2&=\frac{a^2\tan^2\alpha\tan^2\beta}{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}\\ &=\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}\\ &=\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)},\end{aligned}$$

所以，

$$h=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}.$$

9. 本题考查解三角形及其应用. 根据余弦定理，

$$\begin{aligned} CB^2&=CD^2+BD^2-2\times CD\times BD\times\cos\angle BDC\\ &=5.2^2+2.9^2-2\times5.2\times2.9\times\cos 113.4\\ &\approx47.427\ 98,\\ CB&\approx6.886\ 8\ (\text{km}).\end{aligned}$$

根据正弦定理，

$$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD},$$

所以

$$\frac{6.886\ 8}{\sin 113.4}=\frac{2.9}{\sin\angle BCD},$$

$$\begin{aligned} \sin\angle BCD&\approx\frac{2.9}{6.886\ 8}\times\sin 113.4\\ &\approx0.458\ 8,\\ \angle BCD&=27.3^\circ,\\ \angle ACB&=91.2^\circ-27.3^\circ\\ &=63.9^\circ.\end{aligned}$$

由余弦定理，

$$\begin{aligned} AB^2&=AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos 63.9^\circ\\ &\approx3.7^2+47.427\ 98-2\times3.7\times6.886\ 8\times0.439\ 9\\ &\approx38.699\ 7,\\ AB&\approx6.2\ (\text{km}).\end{aligned}$$

答：A、B 之间的距离是 6.2 km.

Ⅳ 拓展资源

1. 半角定理

在$\triangle ABC$中，三个角的半角的正切和三边之间有如下的关系：

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{p-c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

其中

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

证明：

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

因为

$$\sin\frac{A}{2}>0,\ \cos\frac{A}{2}>0,$$

所以

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a-b+c)}{4bc}}.$$

因为

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

所以

$$a-b+c=2(p-b),$$
$$a+b-c=2(p-c).$$

所以

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

而

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

所以

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

所以

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

同理可得：

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{p-c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

从上面的证明过程中，我们可以得到用三角形的三条边表示半角的正弦和半角的余弦的公式：

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

同理可得：

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}};$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

2. 用三角形的三边表示它的内角平分线

设在$\triangle ABC$中（图1），已知三边a、b、c，如果三个角A、B和C的平分线分别是t_a、t_b和t_c，那末，用已知边表示三条内角平分线的公式是：

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)};$$

$$t_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)};$$

$$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

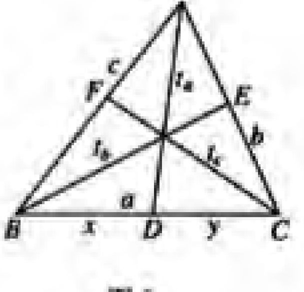


图1

证明：设AD是角A的平分线，并且$BD=x$，$DC=y$。那么，在$\triangle ADC$中，由余弦定理，得

$$t_a^2=b^2+y^2-2by\cos C. \tag{1}$$

根据三角形内角平分线的性质，得

$$\frac{c}{b}=\frac{x}{y}.$$

所以

$$\frac{c+b}{b}=\frac{x+y}{y}.$$

因为

$$x+y=a,$$

所以

$$\frac{c+b}{b}=\frac{a}{y}.$$

所以

$$y=\frac{ab}{b+c}. \tag{2}$$

(2) 代入 (1)，得

$$\begin{aligned}t_a^2&=b^2+\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2-2b\left(\frac{ab}{b+c}\right)\cos C\\&=\frac{b^2}{(b+c)^2}[b^2+c^2+2bc+a^2-2a(b+c)\cos C].\end{aligned}$$

因为

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

所以

$$\begin{aligned}t_a^2&=\frac{b^2}{(b+c)^2}\left[a^2+b^2+c^2+2bc-2a(b+c)\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right]\\&=\frac{bc}{(b+c)^2}(b^2+c^2+2bc-a^2)\\&=\frac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(b+c-a)\\&=\frac{bc}{(b+c)^2}\cdot 2p\cdot 2(p-a)\\&=\frac{4}{(b+c)^2}\cdot bcp(p-a).\end{aligned}$$

所以

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

同理可得：

$$t_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)};$$

$$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

这就是已知三边求三角形内角平分线的公式.

3. 用三角形的三边来表示它的外接圆的半径

设在$\triangle ABC$中，已知三边 a，b，c，那么用已知边表示外接圆半径 R 的公式是

$$R=\frac{abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

证明：因为

$$R=\frac{a}{2\sin A},$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

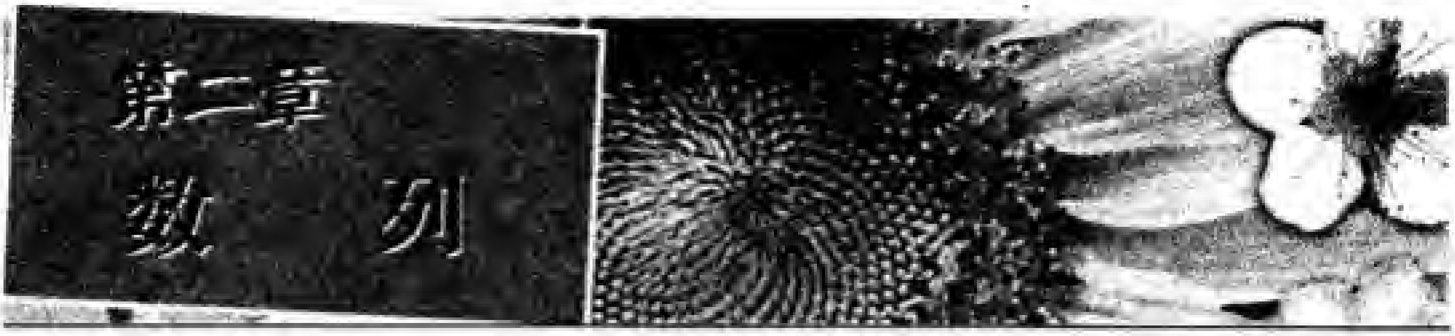
所以

$$\sin A=\frac{2S}{bc},$$

所以

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{4S}$$

$$=\frac{abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$



第二章 数列

Ⅰ 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

本章学习的主要内容是数列的概念和简单表示法、等差数列与等比数列.

数列作为一种特殊的函数，是反映自然规律的基本数学模型. 本章强调用函数的背景和研究方法来认识、研究数列，在通过实际问题引入数列概念后，使学生体会数列的函数背景，感受数列是研究现实问题情境的数学模型.

等差数列与等比数列作为特殊数列，在现实生活中有着广泛应用. 通过本段内容的学习，使学生经历从日常生活中的实际问题抽象出等差数列和等比数列模型的过程，探索并掌握其中的一些基本数量关系，感受这两种数列模型的广泛应用，并利用它们解决一些实际问题.

2. 学习目标

(1) 数列的概念和简单表示法

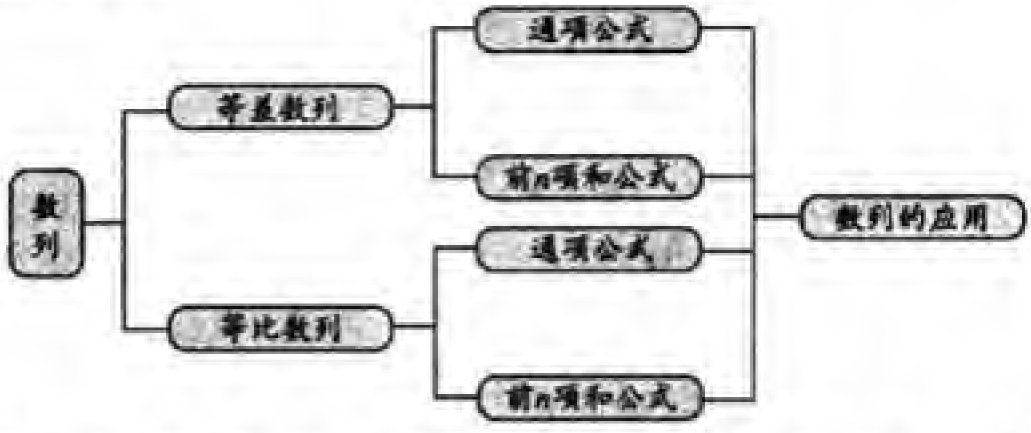
通过日常生活中的实例，了解数列的概念和几种简单的表示方法（列表、图象、通项公式），了解数列是一种特殊函数.

(2) 等差数列、等比数列

通过实例，理解等差数列、等比数列的概念，探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和的公式，能在具体的问题情境中，发现数列的等差关系或等比关系，并能用有关知识解决相应的问题. 体会等差数列、等比数列与一次函数、指数函数的关系.

二、本章内容安排

本章的知识框图如下：



本章共分五节：2.1 数列的概念与简单表示法，2.2 等差数列，2.3 等差数列的前 n 项和，2.4 等比数列，2.5 等比数列的前 n 项和.

本章是通过对一般数列的研究，转入对两类特殊数列——等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式的研究. 教科书首先通过三角形数、正方形数的实例引入数列的概念，然后将数列作为一种特殊函数，介绍了数列的几种简单表示法（列表、图象、通项公式、简单的递推公式）. 等差数列是从现实生活中的一些实例引入，然后由定义入手，探索发现等差数列的通项公式，等差数列的前 n 项和公式是通过 $1+2+3+\cdots+100$ 的高斯算法推广到一般等差数列的前 n 项和的算法. 与等差数列呈现方式类似，等比数列的定义是通过细胞分裂、计算机病毒感染、银行存款利息，以及我国古代关于"一尺之棰，日取其半，万世不竭"问题的研究，探索发现得出的，然后类比等差数列的通项公式，探索发现等比数列的通项公式，接着通过实例引入等比数列的前 n 项和，并用错位相减法探索发现等比数列前 n 项和公式. 最后，通过"九连环"问题的阅读与思考以及"购房中的数学"的探究与发现，进一步感受数列与现实生活的联系.

我们可从以下几方面把握本章教学内容：

1. 本章内容设计重视数列的函数背景. 在通过实际问题引入数列概念后，对数列的函数背景进行了分析，明确了数列与函数的关系，指出数列是一类特殊函数，同时，对于函数 $y=f(x)$，如果 $f(i)(i=1,2,3,\cdots)$ 有意义，这些函数值也可以组成一个数列，数列的通项公式可看作是数列的函数解析式. 对两类特殊数列——等差数列与等比数列的概念、通项公式，求和公式的研究，也是类比函数展开的. 首先，它们是特殊数列，也是特殊函数，等差数列实际是一次型函数，是最简单的递推数列，等比数列实际是指数型函数；其次，它们具有函数的一般性质.

2. 本章内容设计突出了某些重要的数学思想方法. 如类比思想、归纳思想、数形结合思想、算法思想、方程思想以及特殊到一般的思想方法等.

类比思想：如，数列与函数、等差数列与一次函数、等比数列与指数函数以及等差数列与等比数列之间概念与性质的类比等. 类比实数的加、减、乘、除运算，等差数列与等比数列实际是对数列中的项施行加法、乘法运算得到的；类比等差数列的通项、性质、前 n 项和，可以得出对等比数列相应问题的研究；类比函数概念、性质、表达式，可以得出对数列、等差数列、等比数列相应问题的研究，类比思想的运用，是本章设计的主要特色.

归纳思想：如等差数列、等比数列概念以及前 n 项和公式的得出和推导过程，充分注意了学生的观察、猜想、发现、归纳、概括、总结等学习过程的体验，强调了归纳思想的具体运用.

数形结合思想：在数列概念的引入及其简单表示方面有具体应用，等差数列、等比数列中有关问题的研究，很多也是借助（函数）图象的背景来研究的.

算法思想：算法思想贯彻全章内容的始终，从对数列通项公式的求解，到等差数列、等比数列前n项和公式的推导，都有算法思想的体现.

方程思想：本章内容中有关数量关系探究方面，注意了方程思想的渗透.

特殊到一般的思想：等差数列、等比数列概念的引入部分，突出了通过对特殊数列各项关系、运算、性质的研究推广到一般数列相应问题研究的思想.

3. 本章内容设计注意了数学知识的内在联系. 如数列与函数、算法、微积分、方程等的联系. 结合算法中有关程序框图和程序语句的有关内容，体现了算法的有关思想；联系微积分中的"分割、取值、近似求和"的曲边图形面积求法的有关知识. 另外，数列本身是一个离散函数，而有关曲边图形面积计算中的数列问题一定程度上融含了"连续"和"离散"的关系.

4. 本章内容的呈现体现了"现实情境——数学模型——应用于现实问题"的特点，其中"问题"的选择和呈现既有古代问题，又有现代问题，现代问题又充分体现了时代性、现实性等特点. 如数列概念引入背景中有关向日葵花盘、花瓣、种子、树木的分叉、古代三角形数、正方形数等问题；等差数列概念引入中有关数数、女子举重级别、水库水位、银行存款等问题以及应用中有关"校校通"的校园网工程投入问题；等比数列概念引入中有关细胞分裂个数、"一尺之棰，日取其半，万世不竭"、病毒感染计算机数、银行复利计算本利和等问题引出等比数列前n项和公式等，这些现实问题情境的素材选择都非常丰富，富有创造性，充分体现了数列是反映自然规律的基本数学模型，等差数列、等比数列模型的得出是通过大量的实际问题抽象出来的，在现实生活中是有具体应用的. 教材的这种处理方式，注重了对学生从实际问题抽象出数列模型的能力的培养，数列的实际应用背景增加了，而对涉及数列中各量之间基本关系的繁难的技能训练题目，要求则有所降低，只要保证能达到基本技能训练目的就可以了.

5. 本章内容设计体现了现代信息技术的应用. 实际教学中可根据具体情况适当的、适度的应用现代教育技术，以做到真正有利于学生的学习，帮助学生认识丰富多彩的大自然，帮助理解数学，提高数学学习的兴趣.

三、课时分配

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）

2.1 数列的概念与简单表示法	约 2 课时
2.2 等差数列	约 2 课时
2.3 等差数列的前n项和	约 2 课时
2.4 等比数列	约 2 课时
2.5 等比数列的前n项和	约 2 课时
回顾与小结	约 2 课时

II 教科书分析

数列可以看成是定义在正整数集或其有限子集上的函数，是一类离散函数，是刻画离散过程的重

要数学模型，同时，数列问题在日常生活中有大量应用，如存款利息、购房贷款等与人们生活关系密切的现实问题．人们解决许多实际问题也需要有关数列的知识．

章前图的图形刻画和文字说明是丰富生动的："有人说，大自然是懂数学的"．文字说明中接着解释，"树木的分杈、花瓣的数量、植物种子或树木的排列……都遵循了某种数学规律"，旁边的图形刻画则生动的展现了大自然的这几种图形．随后，文字说明部分提示大自然的这种规律性与数列间的关系．实际教学中可以利用章引言对全章内容的把握和总体概括，以及章前图的图形刻画和文字说明的教学引入，引导学生注意观察图形及图形特征，可以安排学生课前查阅资料进行相关准备，也可以教师帮助指导解决．教师要注意对相关背景资料的理解和把握，要通过这些资料，使学生理解大自然的丰富多彩，感受"大自然是懂数学的"，明确这些图示和本章要学习的数列内容是密切联系的．有条件的学校可借助现代教育技术手段向学生展示生动丰富的大自然场景，使学生感受到即将学习的这段内容充满了大自然的奥妙和神奇，激发学生学习的求知欲．

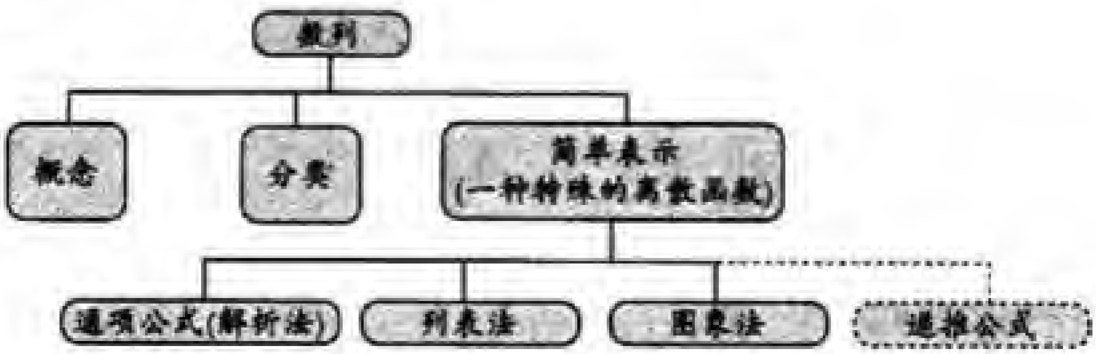
以下是关于章头图的一些知识背景：

1．向日葵花盘上的种子是螺旋排列的，这种排列有时是 21 个顺时针，34 个逆时针；有时是 34 个顺时针，55 个逆时针，这些排列的数字组成一个数列，分别是：1、2、3、5、8、13、21、34、55、89，…．其中，每一个数都是前面两个数字之和，这就是费波那契数列．向日葵花盘上种子的数目为什么是这样的规律呢？科学家们苦苦思索了几个世纪，直到 1992 年，两位法国数学家伊夫·库代和斯特凡尼·杜阿迪才给出了较为令人满意的解释，也即费波那契数列的这种排列方式可以使得花朵顶端的种子数目最多．

2．插图右侧是四种不同类型的花瓣，其花瓣数目分别是 3 瓣、5 瓣、8 瓣、13 瓣，如百合花 3 瓣，梅花 5 瓣，飞燕草 8 瓣，万寿菊 13 瓣等，而这与费波那契数列是相关的．插图左侧是树木分杈、植物种子等的插图，如松树的松果，其果鳞的排列成螺旋状，各螺旋线上果鳞的数目，构成斐波那契数列．

2.1 数列的概念与简单表示法

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：理解数列的概念，认识数列是反映自然规律的基本数学模型，探索并掌握数列的几种简单表示法（通项公式、列表法、图象法）．

难点：

1. 认识数列是一种特殊函数；

2. 发现数列的规律，找出数列可能的通项公式.

三、编写意图与教学建议

本节约需 2 课时，建议用 1 课时研究数列的概念、分类，明确数列与函数之间的关系，用 1 课时研究有关数列的简单表示法.

人们对数列的研究有的源于现实生产、生活的需要，有的出自对数的喜爱. 教科书从三角形数、正方形数入手，指出数列实际就是按照一定顺序排列着的一列数，数列中的每一项和它的序号有关. 数列可以看成是定义在正整数集或其有限子集上的函数. 对有关数列的简单表示，也是借助函数的研究方法进行的，即数列表示中的通项公式（解析法）、列表法、图象法实际分别对应着函数的三种表示.

教科书的这种编排和呈现方式，一方面可以让学生体会数列是一种特殊函数，是刻画离散过程的一种重要数学模型，加深对函数概念和性质的理解，对数列的本质有清晰的认识和把握；另一方面，通过数列概念引入以及数列应用的过程，培养学生对客观事物中蕴涵的数学模式进行思考和作判断的能力. 同时，借助函数的背景和研究方法来研究有关数列的问题，可以进一步让学生体会数学知识间的关联，培养学生用已知去研究未知的能力.

本节适合使用信息技术创设教学情境的内容大致有：数列概念引入部分；数列的图象表示等.

2.1.1 数列的概念

1. 对数列概念的引入可作适当拓展. 一方面从研究数的角度提出数列概念，使学生感受数列是刻画自然规律的基本数学模型；另一方面可从生活实际引入，如银行存款利息、购房贷款等，使学生对这些现象的数学背景有一直观认识，感受数列研究的现实意义，以激发学生的学习兴趣.

2. 对数列概念的把握，教学中应注意：

(1) 数列是按照一定顺序排列着的一列数. 教科书给出这个概念后，没有急于出数列的表示，而是说明了数列中的各项与序号的对应关系，为后文的数列是特殊函数作好铺垫，然后通过“观察”栏目，巩固、加深对数列概念及分类的理解. 教学中要注意留给学生回味、思考的空间和余地.

(2) 数列是一种特殊函数，其定义域是正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集），值域是当自变量顺次从小到大依次取值时的对应值. 教科书通过数列的定义域与值域之间这种一一对应关系的列表，深化对数列是一种特殊函数的认识.

(3) 反之，对于函数 $y=f(x)$，如果 $f(i)(i=1, 2, 3, \cdots)$ 有意义，这些函数值也可以组成一个数列，教学中要注意数列与函数的这种关系的把握.

3. 对数列的两种分类：有穷数列、无穷数列；递增数列、递减数列、常数列、摆动数列. 这些分类的严格定义不要求学生记忆，只要学生知道上述分类是依据不同分类标准作出的、能够对所给数列的类别作出准确判断就可以了.

2.1.2 数列的简单表示法

1. 本节主要学习数列的简单表示法：通项公式、列表法、图象法、简单的递推公式. 探求和发现数列的各项之间的关系及其规律，并用合适的表示法表示这种规律性.

2. 教科书第 33 页右下角对数列与函数的关系作了阐述之后，边空给出了一道思考题：“函数 $y=$

$7x+9$ 与 $y=3^x$，当 x 依次取 1，2，3，…时，其函数值构成的数列各有什么特点?”此问题一方面说明当自变量取整数集时，若函数值有意义，则这些函数值可以构成一个数列，同时，为后续的等差数列与等比数列的学习埋下伏笔．教学中要注意鼓励学生的各种可能设想．

3．有关数列的简单表示法的三个例题：

数列的简单表示呼应数列是一种特殊函数，类比给出了三种不同的表示法：通项公式、列表法、图象法．指出根据数列的前若干项写出的通项公式的形式可能不唯一．所选三个例题分别是数、图形、式（简单递推公式）给出的数列，有很强的代表性．

例题 1 是根据数列的前若干项写出该数列的一个通项公式，是由“数”给出数列的“式”（通项公式）的例子；

例题 2 是由图形呈现数列的例子．数列与函数一样，可以用图象、列表等方法表示，数列的图象是一系列孤立的点，紧接的例题 2 就是用通项公式和图象法两种方法表示希尔宾斯基三角形中着色三角形个数构成的数列；

例题 3 给出了一个数列的递推公式，要求写出该数列的前若干项，是由式（简单递推公式）给出数列的例子，与例题 1 的学习是互为相反的关系．教科书首先通过一个简单例子介绍了什么是数列的递推法，指出通过递推法得到的数列的表达式是递推公式，递推公式也是数列的一种表示方法．同时，例题 3 的目的之一也是为了引入下文的等差数列，等差数列是最简单的递推数列．

（1）教学中可以联系函数的三种常用表示法：解析法、列表法、图象法，明确数列的三种表示法与函数的这三种表示法的关系．即数列的通项公式实际就是数列的函数解析式，都可以用图象或列表反映两个变量的对应关系；但是，数列的图象是一系列孤立的点．数列列表中自变量的取值更有规律性等．三个例子的教学，重点在于引导学生体会数列是一种特殊函数，体会变量之间的依赖关系，明确数列的几种简单表示．

（2）对于例题 1 的教学，应注意：

引导学生观察该数列前 4 项的特点，分清各项之间的数量关系，注意各项与各项的序号之间的关系；

仅根据数列的前若干项写出的数列的通项公式的形式可能不唯一．如例 1(1)也可以写作

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{n}\,(n=2m,\ m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),\\ \dfrac{1}{n}\,(n=2m-1,\ m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).\end{cases}$$

鼓励学生写出其他可能的表达式或其他例证．

可以让学生自己用列表法或图象法表示该数列，使学生进一步明确数列的图象是一些离散的点，原因在于数列自变量的取值是一些离散的点．教学中可联系第 36 页的习题 3．

（3）对于例题 2 的教学，应注意：

引导学生观察图形特点，分清着色三角形个数与序号的关系，发现其中的数量关系．

引导学生观察图象表示的图形特点，要注意结合函数的图象表示，并联想可能的函数表示．

相关的希尔宾斯基三角形（雪花曲线）的内容，有兴趣的学生，可以课后查阅资料帮助拓广知识面，丰富本段内容．

（4）对于例题 3 的教学，应注意：

掌握递推法很关键的一点是把握其中的递推关系，教学中要注意引导学生探究和发现递推关系中前项和后项，或前、后几项之间的关系．

递推公式作为数列的一种表示方法，教学中只要让学生明确这一点，并能根据给出的数列递推公式，写出其中的几项就可以了．繁难复杂的递推公式，如三项或三项以上的递推公式不作要求．

等差数列是最简单的递推数列，关于这一点，可以让学生从递推法的定义去理解等差数列，感受等差数列是一类特殊数列，也是一类特殊的递推数列.

四、教学设计案例

2.1.1 数列的概念

1. 教学任务分析

(1) 了解数列的概念.

通过实例，引入数列概念，理解数列的顺序性，感受数列是刻画自然规律的数学模型. 了解数列的几种分类.

(2) 了解数列是一种特殊函数.

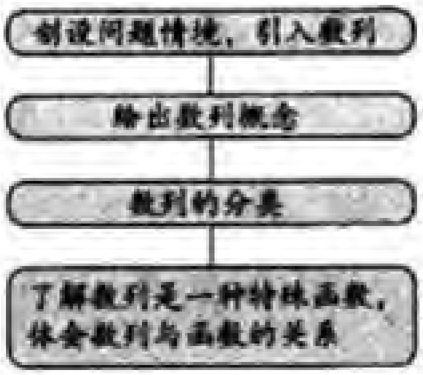
了解数列是一类离散函数，体会数列之间的变量依赖关系，了解数列与函数之间的关系.

2. 教学重点、难点

重点：了解数列的概念和简单表示法，了解数列是一种特殊函数，体会数列是反映自然规律的数学模型.

难点：将数列作为一种特殊函数去认识、了解数列与函数之间的关系.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
(1) 三角形数（见课本） 图 2.1-1 中的三角形分别代表哪些数？这些数有什么规律吗？与它表示的三角形序号是什么关系？ (2) 正方形数（见课本） 图 2.1-1 中的正方形分别代表哪些数？这些数有什么规律吗？与它所表示三角形序号是什么关系？	(1) 体会用数刻画图形特征的性质； (2) 体会这些数的排列的顺序性； (3) 体会数列中的项与它的序号的对应关系.	教师：启发学生观察图形特征，以及表示数之间的关系，重点让学生体会这些表示数的顺序关系、体会数列中的各项与它的序号之间的对应关系，为后面理解数列是一种特殊函数埋下伏笔. 教师要注意适时地把讨论的焦点关注到对数列概念的认识上，如数列的各项的顺序性以及与其序号的对应性. 关于图形特征和表述数间的关系，学生可能有各种不同解释，只要合理，就要给予肯定，如三角形数的图形是在原图形的下一行新增一行、或在原图形的斜右侧新增一行得到，等等.

续表

问　题	设计意图	师生活动
(3) 上述三角形数、正方形数的共同特点是什么?	概括出数列的定义.	学生：分组讨论，可能会有不同答案：都是递增的；前数与后数的差符合一定规律；这些数都是按照一定顺序排列的；甚至还有学生从奇、偶性上考虑等. 教师引导归纳出数列的定义.
(4) 对数列概念的辨析.	加深对数列概念的理解.	教师提出问题：①"相同的一组数按不同顺序排列时，是否为同一个数列?"，②"一个数列中的数可以重复吗?" 等等，引导学生通过举例进行辨析.
(5) 你能举出身边的数列的例子吗?	1. 体会数列问题是存在于现实生活中的； 2. 加深对数列概念之中的顺序的理解.	学生：举出生活中的例子 教师：要注意归纳总结这些数的共同特征，按照一定顺序排列.
(6) 由学生所举实例出发，给出数列的分类.		
(7) 数列中的数和它的序号是什么关系? 哪个是变动的量，哪个是随之变动的量? 你能联想到以前学过的哪些相关内容?	体会数列与函数概念的联系.	教师：举例. 将序号写在上面，下面的相应位置写上数列的各项. 首先引导学生说出上下两行是两组变量，然后分析这两组变量之间的关系. 学生：联想到函数间的变量依赖关系，认识到数列是函数. 教师：数列的定义域、值域分别是什么? 学生：学生对定义域的陈述可能不严格或不完整，要引导学生注意回答的全面性.
(8) 数列是一种函数，这种函数有什么特殊性吗?	体会数列是由一系列孤立的点组成，体会数列是一类离散函数的特点.	教师：举一数列和连续函数的例子，让学生体会数列作为一种函数，与连续函数有所不同.
小结：你怎样理解"数列是刻画自然规律的数学模型"? "对数列与函数的关系，你是怎样理解的?"	加深对数列概念的认识.	学生：讨论、交流. 教师：总结、评价.

信息技术应用：估计$\sqrt{2}$的值

这部分内容以历史上的第一次数学危机作为引子，结合前面学过的算法，给出了$\sqrt{2}$的不足近似值的一种算法以及由此得出的相应数列，是将算法和数列内容有机结合的很好的阅读材料. 可以结合前面算法内容中用二分法估计$\sqrt{2}$的近似值学习本段内容，鼓励学生给出其他可能的估计$\sqrt{2}$的方法. 本段内容给出的程序框图对应的程序语句：

```
D=0.1
A=1
DO
IF (A+D)^2<=2 THEN
```

```
    A=A+D
ELSE
    PRINT A
    D=D/10
END IF
LOOP UNTIL D<=0.000 001
END
```

五、习题解答

观察（第 33 页）

（1）递增数列；（2）递增数列；（3）常数列；（4）递减数列；（5）摆动数列；（6）递增数列；递减数列.

思考（第 34 页）

考察数列的性质，主要涉及数列的单调性、最值、奇偶性等. 利用数列的通项公式，我们可以判断数列的单调性（可以利用前、后两项的差值或比值判断）、奇偶性（根据 $f(-x)=f(x)$，或 $f(-x)=-f(-x)$ 成立与否判断，$f(x)$ 是数列的通项公式），也可以判断有无最值，最值是什么，等等.

练习（第 36 页）

1.

n	1	2	…	5	…	12	…	n
a_n	21	33	…	69	…	153	…	$3(3+4n)$

2. 前 5 项分别是：1，0，-1，0，-1.

3. 例 1（1）$a_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{n}(n=2m,\ m\in\mathbf{N}),\\ \dfrac{1}{n}(n=2m-1,\ m\in\mathbf{N});\end{cases}$

（2）$a_n=\begin{cases}2(n=2m,\ m\in\mathbf{N}),\\ 0(n=2m-1,\ m\in\mathbf{N});\end{cases}$

此题是通项公式形式不唯一的题目，鼓励学生说出各种可能的表达形式，并举出其他可能的通项公式表达形式不唯一的例子.

4. （1）$a_n=\dfrac{1}{2n-1}(n\in\mathbf{Z}^+)$；

（2）$a_n=\dfrac{(-1)^n}{2\times n}(n\in\mathbf{Z}^+)$；

（3）$a_n=\dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$.

5. （1）$a_n=n-1(n\in\mathbf{N})$；　　（2）无；

（3）$a_n=3(n\in\mathbf{N})$；　　（4）无；

（5）$a_n=(-1)^n(n\in\mathbf{N})$；　　（6）无.

习题2.1（第38页）

A组

1. (1) 2，3，5，7，11，13，17，19；

(2) 2，$\sqrt{6}$，$2\sqrt{2}$，3，$\sqrt{10}$，$2\sqrt{3}$，$\sqrt{14}$，$\sqrt{15}$，4，$3\sqrt{2}$；

(3) 1，1.7，1.73，1.732，…，1.732 050；

2，1.8，1.74，1.733，…，1.732 051.

说明 此题可结合前面"观察"的习题设置．教学中可引导学生回顾"不足近似值"与"过剩近似值"的概念．

2. (1) 1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{25}$；

(2) 2，-5，10，-17，26.

3. (1) (1)，-4，9，　(-16)，25，　(-36)，49；

$a_n=(-1)^{n+1}n^2$；

(2) 1，$\sqrt{2}$，($\sqrt{3}$)，2，$\sqrt{5}$，($\sqrt{6}$)，$\sqrt{7}$；

$a_n=\sqrt{n}$.

4. (1) $\frac{1}{2}$，3，13，53，213；

(2) $-\frac{1}{4}$，5，$\frac{4}{5}$，$-\frac{1}{4}$，5.

说明 此题是根据递推公式写出前几项的题目．教学中鼓励学生对数列的规律进行探讨和发现，如：(1) 中前后两项相减后得到的数列是等比数列；(2) 中数列重复出现$-\frac{1}{4}$，5，$\frac{4}{5}$等.

5. 对应的答案分别是：

(1) 16，21；$a_n=1+5n$；

(2) 10，13；$a_n=1+3n$；

(3) 24，35；$a_n=n^2+2n$.

说明 本题设计突出了数列的数、形结合的特点，通过观察图形特征，帮助学生发现图形所表示数的规律和特点．一方面，培养学生发现图形特征和规律的能力；另一方面，在单纯发现数列的规律比较困难的情况下，可以借助图形帮助解决；反之，在观察图形特征比较困难的情况下，也可以考虑从观察数列特点入手进行解决．题目中这三个数列都是简单的递推数列．教学中可先从图形分析入手，也可从观察数列特征分析入手，教师可以对此题题目作适当变动或拓展.

6. 15，21，28；$a_n=a_{n-1}+n$.

此题是根据数列的前几项，给出递推公式的题目．教学中可结合课本第 32 页的图，注意引导学生发现数列的前后两项的数量关系及规律．相应的，有关正方形数的问题也可以作相关练习.

B组

1. 该数列的递推公式是：$a_{n+1}=1+8a_n$，$a_1=1$．通项公式是：$a_n=\frac{8^n-1}{7}$

此题是观察图形特征，给出数列通项公式的题目．教学中要注意引导学生对图形表示数字规律的认识和发现，要培养从整体上去认识图形规律的意识和能力．本题中第一个正方形块中着色正方形个数是 1，第二个着色正方形个数是第一个着色正方形个数的 8 倍加 1，第三个着色正方形个数是第二

个着色正方形个数的 8 倍加 1. 依次类推，可以得出第 n 个正方形块中着色正方形的个数的递推公式，进而推导出数列的通项公式，也可鼓励学生用其他方法发现该数列通项公式.

2. $a_1=10\times(1+0.72\%)=10.0072$；

$a_2=10\times(1+0.72\%)^2\approx 10.144518$；

$a_3=10\times(1+0.72\%)^3\approx 10.217559$；

$a_n=10\times(1+0.72\%)^n$.

此题将数列问题与银行存款的实际问题结合起来，可以使学生感受数列与实际生活的密切联系，同时，可以结合前面学过的指数函数内容.

3. (1) 1，2，3，5，8；

(2) 2，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{8}{5}$，$\frac{13}{8}$；

此题数列 $\{a_n\}$ 是由简单递推公式给出的数列，数列 $\{b_n\}$ 是由数列 $\{a_n\}$ 构造生成的. 教学中要注意引导学生对这两个数列的规律和关系的认识和发现，鼓励学生尽可能说出各种可能的猜想，如数列 $\{b_n\}$ 的各项的乘积是 1；前项的分子是后项的分母、前项分子与分母之和是后项的分母等.

4. 该数列的通项公式：

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{7(3^n-3^{n-1})+26}{8},（n 是奇数）\\[2ex] \dfrac{42\cdot 3^{n-2}-26}{8}.（n 是偶数）\end{cases}$$

本题首先对原递推公式进行变形推导，原公式变形为：

$$a_n+a_{n-1}=3(a_{n-1}+a_{n-2})(n\geqslant 3).$$

所以，

$$a_n+a_{n-1}=7\cdot 3^{n-2}(n\geqslant 3).$$

将各式列出：

$$a_3+a_2=7\cdot 3^1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
$$a_4+a_3=7\cdot 3^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$
$$a_5+a_4=7\cdot 3^3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$
$$\cdots$$
$$a_n+a_{n-1}=7\cdot 3^{n-2} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (n-2)$$

讨论当 n 是奇数和偶数的两种不同情况：

n 是奇数时，

①−②+③−…+ $(n-2)$ ，有：

$$\begin{aligned}a_2+a_n&=7(3^1-3^2+3^3-\cdots-3^{n-3}+3^{n-2})\\&=7[(3^1+3^3+\cdots+3^{n-2})-(3^2+3^4+\cdots+3^{n-3})]\end{aligned}$$

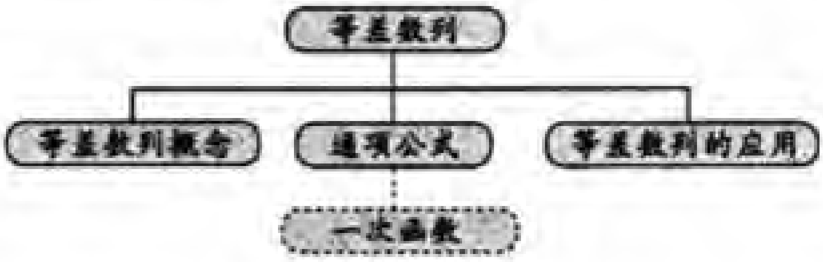
n 是偶数时，同理有：

$$\begin{aligned}a_2-a_n&=7(3^1-3^2+3^3-\cdots+3^{n-3}-3^{n-2})\\&=7[(3^1+3^3+\cdots+3^{n-3})-(3^2+3^4+\cdots+3^{n-2})]\end{aligned}$$

从而求得结果.

2.2 等差数列

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：理解等差数列的概念及其性质，探索并掌握等差数列的通项公式，会用公式解决一些简单的问题，体会等差数列与一次函数之间的联系.

难点：概括通项公式推导过程中体现出的数学思想方法.

三、编写意图与教学建议

本节内容是在学习了数列的一些基本知识之后，转入对特殊数列——等差数列的学习.

等差数列在日常生活中有着广泛的应用. 因此，教科书中配置了大量的实际生活中的等差数列问题. 目的是希望学生能通过对日常生活中实际问题的分析，建立等差数列模型，用相关知识解决一些简单的问题. 在这个过程中形成等差数列的概念，加深对等差数列性质的理解，初步培养学生运用等差数列模型解决问题的能力.

本节中，教科书还力图体现等差数列与方程、一次函数之间的联系.

1. 引入

教科书并没有一开始就转入对等差数列的研究，而是先从实数的运算与性质出发，通过类比，提出研究数列是否也可以像研究实数一样，研究数列的项与项之间的某些运算和性质. 从而引出本节所要研究的问题. 这样处理是为了让学生从中学会提出问题、研究问题的方法.

2. 等差数列概念的教学

（1）等差数列在日常生活中有着广泛的应用. 因此，教科书给出了现实生活中经常遇到的 4 个数列模型，其实是给出了等差数列的现实背景. 目的是让学生切实感受到等差数列是现实生活中大量存在的数列模型.

（2）紧跟在实例之后的“观察”栏目，是为了给学生一定的思考和探索的空间，让他们自己通过观察、归纳、猜想等认识到等差数列的特性.

教学时，应充分利用这 4 个引入实例（必要的话，可以补充一些具体实例），可以先引导学生逐一

观察数列①、②、③、④的特征，然后概括出它们的共同特征．这时一方面要引导学生观察相邻两项间的关系，另一方面要结合对数列①、②、③、④的具体探索，让学生通过“归纳”和“概括”发现数列①、②、③、④，每个都具有相邻两项差为同一个常数的特点．可以让学生试着用自己的语言描述等差数列的特征，从而，给出等差数列的定义．

另外，可以让学生尝试用递推公式描述等比数列的定义，即

$$a_{n+1}-a_n=d(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots).$$

3. 通项公式的教学

（1）接下来的“思考”，是在前面学习了数列的基础上，让学生自己去找本节中①、②、③、④的通项公式，为后面求一般等差数列通项公式作铺垫．这是从研究具体的等差数列通项公式到一般等差数列通项公式的一个过渡．

在求①、②、③、④的通项公式时，可以让学生根据已经学过的数列通项公式的定义，研究每一数列的项与序号之间的关系，归纳出各个数列的通项公式．

（2）等差数列通项公式是由等差数列概念，通过归纳的方式得出的．教学时，可以引导学生根据等差数列的定义进行归纳：

$$a_2-a_1=d,$$
$$a_3-a_2=d,$$
$$a_4-a_3=d,$$
$$\cdots\cdots$$

所以

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d,$$
$$a_4=a_3+d,$$
$$\cdots\cdots$$

至此，可让学生自己猜想通项会是什么，使学生体会归纳、猜想在得出新结论中的作用．

需要说明的是，此处由归纳得出的公式只是一个猜想，严格的证明需要用数学归纳法的知识．在这里，我们暂且先承认它．

（3）事实上，除了教科书上给出的推导方法之外，还可以有其他的方法，例如：

解法 1 （迭加法）：$\{a_n\}$是等差数列，所以

$$a_n-a_{n-1}=d,$$
$$a_{n-1}-a_{n-2}=d,$$
$$a_{n-2}-a_{n-3}=d,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_2-a_1=d.$$

两边分别相加得

$$a_n-a_1=(n-1)d,$$

所以

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

解法 2 （迭代法）：$\{a_n\}$是等差数列，则有

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+d\\&=a_{n-2}+d+d\end{aligned}$$

$$=a_{n-2}+2d$$
$$=a_{n-3}+d+2d$$
$$=a_{n-3}+3d$$
$$\cdots\cdots$$
$$=a_1+(n-1)d,$$

所以

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

4. 例题的教学

(1) 例 1 的目的主要是熟悉公式，使学生从中体会公式与方程之间的联系．教学时，要使学生认识到等差数列的通项公式，其实就是一个关于 a_n、a_1、d、n（独立的量有 3 个）的方程，以便于学生能把方程思想和通项公式相结合，解决等差数列问题．

例 1 中的(2)是判断一个数是否是某等差数列的项．这个问题可以看作(1)的逆问题．需要向学生说明的是，求出的项数为正整数，所给数就是已知数列中的项．否则，就不是已知数列中的项．

(2) 例 2 是等差数列用于解决实际问题的一个简单应用．此题的目的是让学生学会从实际问题中抽象出等差数列模型，用等差数列的知识解决实际问题．

(3) 例 3 实际上给出了判断一个数列是否是等差数列的一个方法：如果一个数列的通项公式是关于正整数 n 的一次型函数，那么这个数列必定是等差数列．因而把等差数列通项公式与一次函数联系起来．

此处安排的“旁注”，目的是为了揭示出等差数列通项公式的结构特征：对于通项公式是形如 $a_n=pn+q$ 的数列，一定是等差数列，一次项系数 p 就是这个等差数列的公差，首项是 $p+q$．由此，可以深化学生对等差数列的理解，同时，还可以从多个角度去看待等差数列的通项公式，有利于以后更好的把握等差数列的性质．

(4) 结合例 3，教科书给出了一个“探究”，目的是让学生从数（结构特征）与形（图象）上进一步认识到等差数列的通项公式与一次函数之间的关系．

第一个问题：目的是让学生从 $a_n=3n-5$ 图象入手，探索出等差数列的图象特征：是均匀分布的一群孤立点．

第二个问题：通过画一次函数 $y=3x-5$ 的图象，从而发现等差数列 $a_n=3n-5$ 与一次函数 $y=3x-5$ 二者图象之间的关系：$a_n=3n-5$ 图象其实就是一次函数 $y=3x-5$ 当 x 在正整数范围内取值时相应的点的集合．进而，可以发现，等差数列 $a_n=pn+q$ 的图象是一次型函数 $y=px+q$ 的图象的一个子集，是 $y=px+q$ 定义在正整数集上时对应的点的集合．

此处可以进一步引申，如让学生考虑等差数列 $a_n=pn+q$ 中的 p 的几何意义，从而引导学生从几何角度看待等差数列；又如，两项（点）可以确定一个等差数列（直线）．

四、习题解答

练习（第 45 页）

1. 表格第一行依次应填：0.5，15.5，3.75；
   表格第二行依次应填：15，-11，-24．
2. $a_n=15+2(n-1)=2n+13$，$a_{10}=33$；
3. $c_n=4n$；

4. (1) 是，首项是 $a_{m+1}=a_1+md$，公差不变，仍为 d；

   (2) 是，首项是 a_1，公差为 $2d$；

   (3) 仍然是等差数列；首项是 $a_7=a_1+6d$；公差为 $7d$；

5. (1) 因为 $a_5-a_3=a_7-a_5$，所以 $2a_5=a_3+a_7$. 同理有 $2a_5=a_1+a_9$ 也成立；

   (2) $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n>1)$成立；$2a_n=a_{n-k}+a_{n+k}(n>k>0)$也成立.

习题 2.2（第 45 页）

A 组

1. (1) $a_{10}=29$；　　(2) $a_1=10$.
2. 略.
3. 60°.
4. 2℃；−11℃；−37℃.
5. (1) $s=9.8t$；　　(2) 588 cm，5 s.

B 组（第 46 页）

1. (1) 从表中的数据看，基本上是一个等差数列，公差约为2 000，$a_{2010}=a_{2002}+8d=0.26\times10^5$，再加上原有的沙化面积 9×10^5，答案为 9.26×10^5；

   (2) 2021 年底，沙化面积开始小于 8×10^5 hm^2.
2. 略.

2.3 等差数列的前 n 项和

一、教学重点与难点

本节教学重点是探索并掌握等差数列的前 n 项和公式，学会用公式解决一些实际问题，体会等差数列的前 n 项和与二次函数之间的联系. 难点：等差数列前 n 项和公式推导思路的获得.

二、编写意图与教学建议

等差数列在现实生活中比较常见，因此等差数列求和就成为我们在实际生活中经常遇到的一类问题. 同时，求数列前 n 项和也是数列研究的基本问题.

1. 等差数列前 n 项和问题的引入

教科书是从一个历史上比较有名的求和例子：$1+2+3+\cdots+100$ 的高斯的算法出发，一方面引发学生对等差数列求和问题的兴趣，另一方面，使学生发现等差数列任意的第 k 项与倒数第 k 项的和等于首项与末项的和这个规律. 也为接下来求前 n 个正整数 $1+2+3+\cdots+n$ 的和、求一般等差数列前 n 项和做好铺垫.

高斯的算法与一般等差数列求和还有一定距离，因此，教科书接下来设置了求 $1+2+3+\cdots+n$ 的问题，目的是引出求等差数列前 n 项和的一般方法："倒序相加法". 这样，很自然地就过渡到一般等

差数列求和问题.

此处设置的"探究"是为了让学生在前面基础上，把数列$1+2+3+\cdots+n$求和的这种本质规律推广到一般的等差数列，获得一般的等差数列求和思路．同时应向学生强调研究问题时从特殊到一般的方法.

高斯的算法比较巧妙，蕴涵有求等差数列前n项和一般的规律性．教学时，应给学生提供充裕的时间和空间，让学生自己去观察、探索发现这种数列内在的规律.

从高斯的算法到一般求和公式，体现了人们在认识事物时从特殊到一般的研究方法，这也是我们解决问题常用的思考方法和研究方法.

2. 公式的教学

(1) 公式的推导．由于教科书在此前的铺垫，可以引导学生自己去推导求和公式．对于这个前n项和公式的推导，也可以有其他的推导途径．例如，

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\\&=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]\\&=na_1+[d+2d+\cdots+(n-1)d]\\&=na_1+[1+2+\cdots+(n-1)]d\\&=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.\end{aligned}$$

要让学生弄清楚这两个公式之间的区别和联系．它们是可以转化的，把$a_n=a_1+(n-1)d$代入$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$中，即可得到$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

(2)"思考"是为了让学生认识公式本身的结构特征．前者反映了等差数列的任意的第k项与倒数第k项的和等于首项与末项的和这个内在性质．后者反映了等差数列的前n项和与它的首项、公差之间的关系，而且是关于n的"二次函数"，可以与二次函数进行比较．两者从不同角度反映了等差数列的性质.

(3) 对于这两个公式，初学的学生在解决一些问题时，往往不知道该如何选取．教师应引导学生对这两个公式进行分析，根据公式各自的特点，帮助学生恰当地选择合适的公式．譬如说，两个公式的共同点是需知a_1和n，不同点是前者还需知a_n，后者还需知d，解题时需根据已知条件决定选用哪个公式.

教学时，可以用熟知的梯形面积公式（给出图形）帮助学生理解和记忆.

3. 例题的教学

(1) 由于教科书上例1是一个实际问题，需要从中建立等差数列模型．对于刚学完公式的学生来讲，直接学习例1跨度稍微大了点，因此，建议讲完公式后，先选用本节练习1中的2个小题，或者补充几个简单的模仿性的练习．例如：(1) $a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$；(2) $a_1=100$，$d=-2$，$n=50$；(3) $a_1=14.5$，$d=0.7$，$a_n=32$等等，让学生熟悉公式.

(2) 例1的配置，主要是培养学生从实际情境中发现等差数列模型，并用相关知识解决问题．教学时，由于例1题目较长，可以先让学生阅读题目，从中提取出有用的信息，构建等差数列模型，然后让学生写出这个等差数列的首项和公差，并根据首项和公差自己选择前n项和公式进行求解.

(3) 例2的设置，目的是建立等差数列前n项和与解方程之间的联系．已知几个量，通过解方程，得出其余的未知量．本例题的教学要让学生体会方程的思想，要引导学生认识到等差数列前n项和公式，就是一个关于a_n、a_1、n或者a_1、n、d的方程，使学生能把方程思想和前n项和公式相结合，解

决等差数列前 n 项和问题.

本题的解法还有很多，教学时可鼓励学生探索其他的解法．例如，

$$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\times 10=310,$$

得

$$a_1+a_{10}=62; \qquad ①$$

$$S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\times 20$$
$$=1220;$$

所以

$$a_1+a_{20}=122; \qquad ②$$

②－①得：

$$10d=60,$$

所以

$$d=6;$$

代入①得：

$$a_1=4.$$

所以有

$$S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d=3n^2+n.$$

（4）例 3 实际上给了一个根据数列前 n 项和公式判断它是否是等差数列的依据．这反映在它的前 n 项和公式本身的结构特征上：一个常数项为 0 的关于 n 的二次型函数.

同时，还给出了等差数列通项公式的一个求法．已知前 n 项和 S_n，可求出通项

$$a_n=\begin{cases}a_1\,(n=1),\\ S_n-S_{n-1}\,(n>1).\end{cases}$$

应该提醒学生注意：这种已知数列的 S_n 来确定 a_n 的方法对于任何数列都是可行的，而且还要强调 a_1 不一定满足由 $S_n-S_{n-1}=a_n$ 求出的通项表达式，故最后要验证首项 a_1 是否满足已求出的 a_n.

此处设置的“探究”，实际上是对例 3 的深化．目的是为了让学生进一步认识到，如果一个数列的前 n 项和公式是常数项为 0，且关于 n 的二次型函数，则这个数列一定是等差数列．从而使学生能从数列前 n 项和公式的结构特征上认识等差数列.

关于这一点，教学时，可以从等差数列两个前 n 项和公式 $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$，$S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ 本身，我们也可以看出，公式里不含常数项．可进一步帮助学生理解.

（5）例 4 实际上是对等差数列前 n 项和公式的一个应用．本题也可以从另外一个角度研究这个问题——从等差数列的通项公式出发，先求出通项公式

$$a_n=a_1+(n-1)d=5+(n-1)\times\left(-\frac{5}{7}\right)=-\frac{5}{7}n+\frac{40}{7}.$$

求前几项和最大，从各项来看，就是考察从哪项开始为非正，之后此数列前 n 项和就开始减小．因此，让 $a_n=-\frac{5}{7}n+\frac{40}{7}\leqslant 0$，得 $n\geqslant 8$．也就是说 $a_8=0$，$a_9<0$．因此，和是从第 9 项开始减小的．而第 8 项为 0 对和的大小不产生影响．因此，前 7 或 8 项和最大.

三、习题解答

练习 2.3（第 52 页）

1. (1) -88； (2) 604.5.
2. $1.25\ \text{km}$.
3. $a_n=\begin{cases}\dfrac{59}{12}, & n=1,\\ \dfrac{6n+5}{12}, & n>1.\end{cases}$
4. 元素个数是 30，元素和为 900.

习题 2.3（第 52 页）

A 组

1. (1) $n(n+1)$；
   (2) n^2；
   (3) 180 个，和为 98 550；
   (4) 900 个，和为 494 550.
2. $4.55\times 10^4\ \text{m}$.
3. 4.
4. 这些数的通项公式：$7(n-1)+2$，项数是 14，和为 665.
5. 1 472.

B 组（第 53 页）

1. 每个月的维修费实际上是呈等差数列的. 代入等差数列前 n 项和公式，求出 5 年内的总共的维修费，即再加上购买费，除以天数即可. 答案：292 元.
2. 本题的解法有很多，可以直接代入公式化简，但是这种比较繁琐. 现提供 2 个证明方法供参考.
   (1) 由

$$S_6=6a_1+15d,$$
$$S_{12}=12a_1+66d,$$
$$S_{18}=18a_1+153d,$$

   可得

$$S_6+(S_{18}-S_{12})=2(S_{12}-S_6).$$

   (2)
$$\begin{aligned}S_{12}-S_6&=(a_1+a_2+\cdots+a_{12})-(a_1+a_2+\cdots+a_6)\\&=a_7+a_8+\cdots+a_{12}\\&=(a_1+6d)+(a_2+6d)+\cdots+(a_6+6d)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_6)+36d\\&=S_6+36d.\end{aligned}$$

   同样可得：

$$S_{18}-S_{12}=S_6+72d,$$

   因此，

$$S_6+(S_{18}-S_{12})=2(S_{12}-S_6).$$

3. (1) 首先求出最后一辆车出发的时间 4 时 20 分；所以到下午 6 时，最后一辆车行驶了 1 小时 40 分.
   (2) 先求出 15 辆车总共的行驶时间，第一辆车共行驶 4 小时，以后车辆行驶时间依次递减，最后

一辆行驶1小时40分．各辆车的行驶时间呈等差数列分布，代入前n项和公式，这个车队所有车的行驶时间为

$$S=\frac{4+1\frac{2}{3}}{2}\times 15=\frac{85}{2}h,$$

乘以车速60 km/h，得行驶总路程为2 550 km.

4. 数列$\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

所以

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

类似地，我们可以求出通项公式为$a_n=\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$的数列的前$n$项和.

5. 因为

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1,$$

所以

$$\begin{aligned}2^3&=1^3+3\times1^2+3\times1+1,\\3^3&=2^3+3\times2^2+3\times2+1,\\&\cdots\\n^3&=(n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1,\\(n+1)^3&=n^3+3n^2+3n+1,\end{aligned}$$

把两端同时加起来，得到

$$\begin{aligned}&2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3\\&=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+(1+1+\cdots+1),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&3(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\&=(n+1)^3-1-3(1+2+\cdots+n)-(1+1+\cdots+1),\end{aligned}$$

化简可得

$$(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

类似地，我们可以用

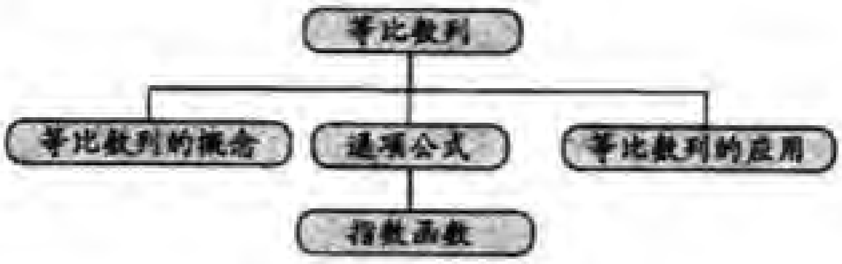
$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1,$$

去求

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

2.4 等比数列

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：理解等比数列的概念，认识等比数列是反映自然规律的重要的数列模型之一，探索并掌握等比数列的通项公式.

难点：

在具体的问题情境中，抽象出数列的模型和数列的等比关系，并能用有关知识解决相应的问题.

三、编写意图与教学建议

与等差数列一样，等比数列在现实生活中也有广泛的应用，因此等比数列的教学可以选择更多的有实际背景的例子（如教育贷款、购房贷款、放射性物质的衰变、人口增长等），也可以让学生自己举一些实际生活中的例子，进一步培养学生从实际问题中抽象出数列模型的能力和用数学知识解决实际问题的能力.

等比数列与等差数列之间存在着很多类似的地方，但也有本质的不同，学生容易把二者混淆．因此，一方面，建议在本节的教学中始终强调等比数列的定义和体现等比数列本质的公比 q；另一方面，本节有利于培养学生的类比推理能力，如等比数列的定义、通项公式等都可以让学生类比等差数列自己给出，还可以让学生自己列表从定义、通项公式、与函数的关系等角度类比两类数列的有关知识.

本节的设计还力图体现等比数列与指数函数、方程等数学知识的横向联系.

1. 对 4 个引入实例的教学建议

与等差数列类似，等比数列概念的引入也是通过从日常生活的实例中抽象出等比数列的模型，从而突出了数列作为反映自然规律的基本数学模型的作用.

本节所列的 4 个背景实例和所传达的思想为：

1. 细胞分裂模型	生命科学中的数列模型，类似的有人口增长的模型等
2.《庄子》中“一尺之棰”的论述	中国古代学者的极限思想
3. 计算机病毒的传播	计算机科学中的数列模型；计算机病毒的危害，“指数爆炸”的例子
4. 储蓄中复利的计算	日常经济生活中的数列模型

这4个实例，既让学生感受到等比数列也是现实生活中大量存在的数列模型，也让学生经历了从实际问题抽象出数学模型（即数列①②③④）的过程，其中实例2留了空白，让学生自己根据“一尺之棰”的论述写出相应的数列模型更是为了体现这个过程.

2. 等比数列概念的引入

紧跟在实例之后的“观察”，是为了给学生一定的思考和探索的空间，让学生自己通过观察、归纳、猜想等认识到等比数列的特性. 这时一方面可以引导学生类比等差数列相邻两项间的关系，一方面可以结合对数列①②③④的具体探索，让学生通过“类比”和“归纳”发现数列①②③④的共同特征是：都是首项逐次乘以一个常数得到的数列.

随后可以让学生类比等差数列和等差中项的定义，自己给出等比数列和等比中项的定义.

另外，可以让学生尝试用递推公式描述等比数列的定义，即

$$a_1=a,\ a_{n+1}=a_nq\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

3. 等比数列的通项公式

（1）让学生回忆用不完全归纳法得到等差数列的通项公式的过程，即由

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots$$

归纳得到$a_n=a_1+(n-1)d$，类比这个过程，引导学生自己归纳出等比数列的通项公式. 归纳的过程是：

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3,$$
$$\cdots\cdots$$

归纳可得

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

这样做可以帮助学生体会归纳推理对于发现新的数学结论的作用. 这个结论的正确性可用数学归纳法进行严格的证明.

接着，还可以让学生类比得到等差数列通项公式的其他方法，探究推导等比数列通项公式的方法.

（2）在等比数列的通项公式的教学中，应使学生明确以下几点：

① 不要把a_n错误地写成$a_n=a_1q^n$. 为此，可以让学生观察首项$a_1=1$，公比为q的等比数列，即

$$q^0=1,\ q,\ q^2,\ \cdots,\ q^{n-1},\ q^n,\ \cdots$$

的特点.

进一步地，为了从变式的角度强调在通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$中，q^{n-1}随序号的变化体现了等比数列的不同形式，且q本身也可以有不同的取值，可以让学生观察首项$a_1=1$，公比为q^2的等比数列，即

$$q^0=1,\ q^2,\ q^4,\ \cdots,\ q^{2n},\ \cdots,$$

请学生回答，在这个数列中，哪些部分是变化的，哪些部分是不变的，各项中变化的部分与序号间有什么联系.

② 对于公比q，要强调它是“从第2项起，每一项与它的前一项的比”，防止把相邻两项的比的次序颠倒.

③ 公比 q 是任意一个常数，但在中学阶段只考虑实数的情形而不用虚数；q 不仅可以是正数，也可以是负数，要防止学生片面理解公比只能是正数.

④ 在等比数列

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \cdots$$

中，当 $a=0$ 时，一切项都等于 0；当 $q=0$ 时，第二项以后的项都等于 0. 这不符合等比数列的定义，所以等比数列的首项和公比都不能为 0.

⑤ 对于公比 q，还可以提出一些问题，启发学生结合实例深入探讨，例如 $|q|=1$ 时会出现什么结果，q 的绝对值大于(或小于)1 与 q 的值大于(或小于)1 是否一样，$q>0$ 与 $q<0$ 时各项的符号怎样，等等.

(3) 等比数列与指数函数有下列关系：等比数列的通项公式可整理为 $a_n=\frac{a_1}{q}q^n$，而 $y=\frac{a_1}{q}q^x\ (q\neq1)$ 是一个不为零的常数 $\frac{a_1}{q}$ 与指数函数 q^x 的乘积. 从图象上看，表示数列 $\left\{\frac{a_1}{q}q^n\right\}$ 中的各项的点是函数 $y=\frac{a_1}{q}q^x$ 的图象上的孤立点. 为了引导学生认识这种关系，教科书设计了第 56 页“探究”的(2)和(3)，把问题具体化为两个首项为 1 的等比数列，其中(2)是 $q>1$ 的情形，(3)是 $q<1$ 的情形，并让学生自己动手画图，这样学生就能借助图象的直观来进行探究了.

4. 与等差数列的进一步类比

教学中可以引导学生进一步研究等差数列和等比数列之间的联系. 例如可以研究下列问题：

(1) 既是等差数列又是等比数列的数列存在吗?

研究的过程可以是这样的：

提问：一个数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots (a_1\neq0)$$

是等差数列，同时还能不能是等比数列呢?

解答：先研究 a_1，a_2，a_3 这三项，由于它们是等差数列，所以有

$$2a_2=a_1+a_3. \qquad ①$$

若它们也是等比数列，由 a_2 是 a_1 与 a_3 的等比中项，得

$$a_2^2=a_1a_3. \qquad ②$$

由①得，$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$，代入②，得

$$(a_1+a_3)^2=4a_1a_3,$$

则 $(a_1-a_3)^2=0$，所以

$$a_1=a_3,$$

由①可得

$$a_1=a_2=a_3.$$

同理可得

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n\neq0.$$

这说明既是等差数列又是等比数列的数列是非零的常数列.

(2) 对于等比数列

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \cdots,\ aq^n,\ \cdots,$$

当 a 和 q 都是正数时，取以 $c\ (c>0,\ c\neq1)$ 为底的对数，得到数列

$$\log_c a，\log_c a+\log_c q，\log_c a+2\log_c q，\cdots，\log_c a+(n-1)\log_c q，\cdots.$$

可见，这是一个以 $\log_c a$ 为首项，以 $\log_c q$ 为公差的等差数列.

(3) 在等比数列 a，aq，aq^2，…，aq^{n-1}各项的积 $a^n q^{1+2+\cdots+(n-1)}$中，q 的指数就是等差数列的前 n 项和 $1+2+\cdots+(n-1)$.

5. 例题的教学建议

(1) 例 1 的教学应关注以下几个方面：

① 帮助学生发现实际问题情境中数列的等比关系，培养学生从实际问题中抽象出数学模型的能力.

② 通过本例的解答可以告诉学生，通项公式反映了数列的本质特征，因此关于等比数列的问题首先应该想到的是它的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$. 由所给的条件，知道 a_n，a_1，q，n 中的某几项，把它们代入通项公式，就可以得到以其余项为未知数的方程，再解此方程就行了.

③ 用对数的知识解方程可以帮助学生回顾对数的性质.

(2) 例 2 的教学应关注：

① 一般来说，根据数列的前几项写出数列的递推公式难度较大，本例题为降低难度，用程序框图给出了数列的前 5 项，而递推公式就包含在程序框图中；另一方面，学生也可再一次体会到能够用框图中的循环结构来描述数列.

② 结合本例可以向学生指出：要证明一个数列是等比数列，只需证明对于任意正整数 n，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$是一个常数就行了.

(3) 例 3 的教学

由等比数列的通项公式列出方程组，求得通项公式，再由通项公式求得数列的任意项，这个过程可以帮助学生再次体会通项公式的作用及其与方程之间的联系.

(4) 例 4 的教学

① 本例的教学可以与第 2.2 节的练习 3 结合起来，后者从计算的角度说明了两个等差数列的和仍然是等差数列，而本例通过让学生举例、不完全归纳和证明，说明了两个等比数列的积仍然是等比数列.

② 从运算的角度来讲，等差数列中相邻两项的差为常数，因此可以研究两个等差数列对应项的和或差；而等比数列中相邻两项的商为常数，因此可以研究两个等比数列对应项的积或商.

③ 本例后的探究就是引导学生思考两个等比数列对应项相除. 也可以结合本例边空中关于等差数列的思考题，让学生类比地提出有关等比数列的相应问题，即：当数列$\{a_n\}$$\{b_n\}$是项数相同的两个等比数列，数列$\{pa_n\cdot qb_n\}$和$\left\{\dfrac{pa_n}{qb_n}\right\}$(其中 p、q 是常数）也是等比数列吗?

四、教学设计案例

2.4 等比数列（第 1 课时）

1. 教学任务分析

(1) 通过实例，理解等比数列的概念.

通过从丰富实例中抽象出的等比数列模型，使学生认识到这一类数列也是现实世界中大量存在的数列模型；同时经历由发现几个具体数列的等比关系，归纳出等比数列的定义的过程.

(2) 探索并掌握等比数列的通项公式.

通过与等差数列的通项公式的推导过程类比，探索等比数列的通项公式；通过与指数函数的图象类比，探索等比数列的通项公式的图象特征及与指数函数之间的联系.

2. 教学重点与难点

重点：等比数列的定义和通项公式.

难点：等比数列与指数函数的关系.

3. 教学基本流程

创设情境，从具体实例引入新课

↓

给出等比数列的定义

↓

自主探究等比中项的定义

↓

自主探究等比数列的通项公式

↓

自主探究等比数列与指数函数的关系

↓

小结：类比等差数列与等比数列

4. 教学情境设计

问　题	问题设计意图	师生活动
(1) 观察图 2.4-1，细胞的分裂有什么规律，你能写出一个数列来表示细胞分裂的个数吗?	由图中所示细胞分裂模型，归纳出细胞分裂的规律，并用数列模型加以刻画.	师：引导学生看图，启发学生发现细胞分裂的规律是：由 1 个分裂为 2 个，2 个分裂为 4 个，4 个分裂为 8 个，… 生：通过观察和画草图，发现细胞分裂的规律，并记录每次分裂所得到的细胞数，从而得到数列 1，2，4，8，….
(2)《庄子》中有这样的论述“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”你能用现代语言叙述这段话吗? 若把“一尺之棰”看成单位“1”，那么“日取其半”会得到一个怎样的数列?	由“日取其半”发现等比关系.	师：引导学生发现“日取其半”所蕴涵的等比关系. 生：发现等比关系，写出一个无穷等比数列.
(3) 在计算机病毒传播的例子中，你能写出一个数列描述每一轮被感染的计算机数吗?	使学生经历发现等比关系，写出等比数列的过程.	师：引导学生发现“病毒制造者发送病毒称为第一轮”“每一轮感染 20 台计算机”中蕴涵的等比关系. 生：发现等比关系，写出一个无穷等比数列.

续表

问　　题	问题设计意图	师生活动
(4) 观察书上的表格，列出5年内各年末本利和，说说它们是怎样得到的？	使学生经历由通项公式求等比数列各项的过程.	师：介绍“复利”的背景，给出计算本利和的公式 本利和=本金×(1+利率)^n， 这里 n 为存期. 生：列出5年内各年末的本利和，并说明计算过程.
(5) 回忆数列的等差关系和等差数列的定义. 观察前面得到的4个数列，说说它们有什么共同特点？	发现数列中的等比关系，概括出等比数列的概念.	师：引导学生类比等差关系和等差数列的概念，发现等比关系和概括出等比数列的定义. 生：观察所得到的数列，分组讨论它们的共同特点，然后归纳出等比数列的定义，在全班交流.
(6) 总结学生的结论，给出等比数列的定义.		
(7) 类比等差中项的概念，请学生自己给出等比中项的概念.		
(8) 补充练习：与等差数列一样，等比数列也具有一定的对称性. 对于等差数列来说，与数列中任一项 a_n 等距离的两项之和等于该项的2倍，即 $a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n$. 对于等比数列来说，有什么类似的性质呢？		
(9) 探究： (ⅰ) 一个数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots (a_i \neq 0)$ 是等差数列，同时还能不能是等比数列呢？ (ⅱ) 写出两个首项为1的等比数列的前5项，比较这两个数列是否相同？两个公比为2的等比数列呢？ (ⅲ) 任一项 a_n 及公比 q 相同，则两个数列相同吗？ (ⅳ) 任意两项 a_m，a_n 相同，则两个等比数列相同吗？ (ⅴ) 若两个等比数列相同，需要什么条件？	(ⅰ) 类比等比数列和等差数列的概念. (ⅱ) 说明首项和公比是决定一个等比数列的必要条件，为等比数列通项公式的推导做准备.	师：引导学生探究，并给出（ⅰ）的答案，（ⅱ）（ⅲ）（ⅳ）可留给学生回答. 生：探究并分组讨论上述问题的解答办法，并交流（ⅰ）的解答.
(10) 引导学生回顾等差数列的通项公式的推导过程，让学生自己推导等比数列的通项公式，并说明首项 a_1 和公比 q 的限制条件.		
(11)《数学1》中也有“细胞分裂”“计算机病毒传播”“复利计算”的练习或习题，那里是用什么方法解决问题的？	通过用不同的数学知识解决类似的数学问题，启发学生将等比数列和指数函数联系起来，发现二者的关系.	师：向学生展示《数学1》中关于“细胞分裂”“计算机病毒传播”“复利计算”的练习或习题，启发学生思考两种解决问题的方法的不同与联系. 生：比较两种方法，思考它们的异同.

续表

问　　题	设计意图	师生活动
(12) 画出书上“探究”中(2)(3)要求的图象，说说通项公式为 $a_n=2^{n-1}$ 的数列的图象和函数 $y=2^{x-1}$ 的图象、通项公式为 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n>1)$ 的数列的图象和函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 的图象之间的关系.	探究等比数列的图象与指数函数的图象之间的联系.	师：让学生借助信息技术或用描点作图画出上述两组图象，然后交流、讨论、归纳出二者之间的关系. 生：借助信息技术或用描点作图画出上述两组图象，观察图象，交流、讨论、归纳出二者之间的关系.

(13) 请学生从定义、通项公式、与函数的联系 3 个角度类比等差数列与等比数列，并填充下列表格.

	等差数列	等比数列
定义		
首项、公差(公比)取值有无限制		
通项公式		
相应图象的特点		

五、习题解答

练习（第 59 页）

1.

a_1	a_3	a_5	a_7	q
2	4	8	16	$\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$
50	2	0.08	0.003 2	0.2

2. 由题意可知，每一轮被感染的计算机台数构成一个首项为 $a_1=80$，公比为 $q=20$ 的等比数列，则第 5 轮被感染的计算机台数 a_5 为

$$a_5=a_1q^4=80\times20^4=1.28\times10^7.$$

3. (1) 将数列 $\{a_n\}$ 中的前 k 项去掉，剩余的数列为 a_{k+1}，a_{k+2}，…. 令 $b_i=a_{k+i}$，$i=1$，2，…，则数列 a_{k+1}，a_{k+2}，…可视为 b_1，b_2，….

因为

$$\frac{b_{i+1}}{b_i}=\frac{a_{k+i+1}}{a_{k+i}}=q(i\geqslant1),$$

所以，$\{b_n\}$ 是等比数列，即 a_{k+1}，a_{k+2}，…是等比数列.

(2) $\{a_n\}$ 中的所有奇数列是 a_1，a_3，a_5，…，则

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_5}{a_3}=\cdots=\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}=\cdots=q^2(k\geqslant1).$$

所以，数列 a_1，a_3，a_5，…是以 a_1 为首项，q^2 为公比的等比数列.

(3) $\{a_n\}$ 中每隔 10 项取出一项组成的数列是 a_1，a_{11}，a_{21}，…，则

$$\frac{a_{11}}{a_1}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\cdots=\frac{a_{10k+1}}{a_{10k-9}}=\cdots=q^{10}(k\geqslant1).$$

所以数列 a_1，a_{11}，a_{21}，…是以 a_1 为首项，q^{10} 为公比的等比数列.

猜想：在数列$\{a_n\}$中每隔 m(m 是一个正整数)取出一项，组成一个新的数列，这个数列是以 a_1 为首项，q^m 为公比的等比数列.

说明 本题可以使学生认识到，等比数列中下标为等差数列的子数列也构成等比数列，可以让学生再探究几种由原等比数列构造新等比数列的方法.

4. (1) 设$\{a_n\}$的公比为 q，则

$$a_5^2=(a_1q^4)^2=a_1^2q^8,$$

而

$$a_3\cdot a_7=a_1q^2\cdot a_1q^6=a_1^2q^8,$$

所以

$$a_5^2=a_3\cdot a_7.$$

同理

$$a_5^2=a_1\cdot a_9.$$

(2) 用上面的方法不难证明 $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}(n>1)$. 由此得出，$a_n$ 是 a_{n-1} 和 a_{n+1} 的等比中项. 同理可证，$a_n^2=a_{n-k}\cdot a_{n+k}(n>k>0)$. 由此得出，$a_n$ 是 a_{n-k} 和 a_{n+k} 的等比中项$(n>k>0)$. .

5. (1) 设 n 年后这辆车的价值为 a_n，则

$$a_n=13.5(1-10\%)^n.$$

(2) $a_4=13.5(1-10\%)^4\approx 88\ 573$(元). 用满 4 年后卖掉这辆车，能得到约 88 573 元.

习题 2.4

A 组（第 60 页）

1. (1) $a_7=a_4\cdot q^3=27\times(-3)^3=-729.$

(2) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq 0)$,

$$\begin{cases}a_5-a_1=15,\\a_4-a_2=6,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1(q^4-1)=15,\\a_1q(q^2-1)=6.\end{cases}$$

化简得：

$$a_1(q^2-1)(q^2+1)=15. \qquad ①$$

$$a_1(q^2-1)=\frac{6}{q}, \qquad ②$$

把②代入①，整理得

$$6q^2-15q+6=0.$$

解方程，得

$$q=2 \quad 或 \quad q=\frac{1}{2}.$$

由 $a_4-a_2=6$，得

$$a_3(q-q^{-1})=6. \qquad ③$$

所以，当 $q=2$ 时，由③得，$a_3=4$；当 $q=\frac{1}{2}$时，由③得，$a_3=-4$.

2. 设 n 年后，需退耕 a_n，则$\{a_n\}$是一个等比数列，其中 $a_1=8$，$q=0.1$. 那么 2005 年需退耕

$$a_5=a_1(1+q)^5=8(1+0.1)^5\approx 13(万公顷).$$

3. 若$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，则首项 a_1 和公比 q 都是正数.

由 $a_n=a_1q^{n-1}$，得

$$\sqrt{a_n}=\sqrt{a_1}\sqrt{q^{n-1}}=\sqrt{a_1}q^{\frac{n-1}{2}}=\sqrt{a_1}(q^{\frac{1}{2}})^{n-1}.$$

所以数列$\{a_n\}$是以$\sqrt{a_1}$为首项，$q^{\frac{1}{2}}$为公比的等比数列.

4. 这张报纸的厚度为 0.05 mm，对折一次后厚度为 0.05×2 mm，再对折后厚度为 0.05×2^2 mm，再对折后厚度为 0.05×2^3 mm. 设 $a_0=0.05$，对折 n 次后报纸的厚度为 a_n，则$\{a_n\}$是一个等比数列，公比 $q=2$. 对折 50 次后，报纸的厚度为

$$a^{50}=a_0q^{50}=0.05\times2^{50}\approx5.63\times10^{13}\text{(mm)}=5.63\times10^{10}\text{(m)}.$$

这时报纸的厚度已经超出了地球和月球之间的平均距离（约 3.84×10^8 m），所以能够在地球和月球之间建一座桥.

5. 设年平均增长率为 q，$a_1=105$，n 年后空气质量为良的天数为 a_n，则$\{a_n\}$是一个等比数列. 由 $a_3=240$，得

$$a_3=a_1(1+q)^2=105(1+q)^2=240,$$

解得

$$q=\sqrt{\frac{240}{105}}-1\approx0.51.$$

6. 由已知条件知，$A=\frac{a+b}{2}$，$G=\sqrt{ab}$，且

$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant0,$$

所以有 $A\geqslant G$，等号成立的条件是 $a=b$. 而 a，b 是互异正数，所以一定有 $A>G$.

B 组

1. 证明：由等比数列通项公式，得 $a_m=a_1q^{m-1}$，$a_n=a_1q^{n-1}$，其中 a_1，$q\neq0$，所以

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{a_1q^{m-1}}{a_1q^{n-1}}=q^{m-n}.$$

2. (1) 设生物体死亡时，体内每克组织中的碳 14 的含量为 1，每年的衰变率为 q，n 年后的残留量为 a_n，则$\{a_n\}$是一个等比数列. 由碳 14 的半衰期为 5 730，则

$$a_n=a_1q^{5\,730}=q^{5\,730}=\frac{1}{2},$$

解得

$$q=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}\approx0.999\,879.$$

(2) 设动物约在距今 n 年前死亡，由 $a_n=0.6$，得

$$a_n=a_1q^n=0.999\,879^n=0.6,$$

解得 $x\approx4\,221$，所以动物约在距今 4 221 年前死亡.

3. 在等差数列

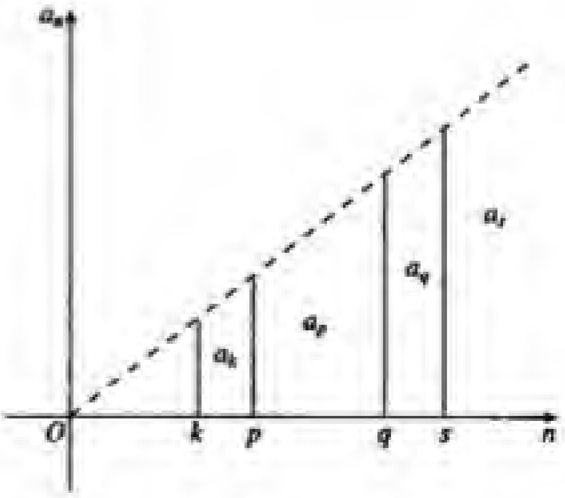
$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

中，有

$$a_7+a_{10}=17=a_8+a_9,$$
$$a_{10}+a_{40}=50=a_{20}+a_{30}.$$

由此可以猜想，在等差数列$\{a_n\}$中，若 $k+s=p+q$（k，s，p，$q\in\mathbf{N}^*$），则

$$a_k+a_s=a_p+a_q.$$



（第 3 题）

从等差数列与函数之间的联系的角度来分析这个问题：由等差数列$\{a_n\}$的图象，可以看出

$$\frac{a_k}{a_p}=\frac{k}{p},\ \frac{a_s}{a_q}=\frac{s}{q}.$$

根据等式的性质，有

$$\frac{a_k+a_s}{a_p+a_q}=\frac{k+s}{p+q},$$

所以，

$$a_k+a_s=a_p+a_q.$$

猜想对于等比数列$\{a_n\}$，类似的性质为：若$k+s=p+q(k,\ s,\ p,\ q\in \mathbf{N}^*)$，则

$$a_k\cdot a_s=a_p\cdot a_q.$$

2.5 等比数列的前 n 项和

一、教学重点与难点

重点：使学生掌握等比数列的前n项和公式，用等比数列的前n项和公式解决实际问题.

难点：由研究等比数列的结构特点推导出等比数列的前n项和公式.

二、编写意图与教学建议

与等差数列的前n项和公式一样，等比数列的前n项和公式也是数列求和的化简式，用这个公式可以方便地求出任意等比数列的前n项的和.

教科书中，等比数列前n项和公式的推导方法是“错位相减法”，这也是一种算法，其设计的思路是“消除差别”，从而达到化简的目的. 可以向学生介绍其他的求和算法，或者让学生自己根据等比数列的特点来设计求和算法.

1. 等比数列前n项和公式的推导

（1）在对一般的形式推导之前，可以先让学生思考一个特殊的简单情形，即边空中的问题：

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=?$$

这个式子更突出地表现了等比数列的特征，所以更有利于引导学生观察，若将上式右边的每一项乘以公比q，就得到它后面相邻的一项.

（2）等比数列的前n项和公式是求等比数列的前n项的和的一个化简式，它的推导有很多方法，教科书所采用的方法是：在$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$中，将等式右边的每一项乘以公比$q$，就得到它后面相邻的一项，采用了“错位相减，消除差别”的方法，即由

$$\begin{aligned} S_n&=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}\\ qS_n&=\phantom{a_1+{}}a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n \end{aligned}$$

得

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

当$q\neq1$时，有

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

这时可以告诉学生，这一思路的得出，源于对上式的观察和分析.

还可以向学生介绍其他的方法. 例如，根据等比数列的定义，可得

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}=q,$$

再由分式的性质，得

$$\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q,$$

整理得

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1).$$

(3) 与等比数列的前 n 项和公式相关的问题

① 由于等比数列的前 n 项和公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 中 $q\neq 1$，可以引导学生思考 $q=1$ 时，等比数列的前 n 项和公式等于多少($S_n=na$). 另外，还可以对公式进行变形，即

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1},$$

让学生思考，当 $q>1$ 和 $q<1$ 时分别使用哪个公式方便.

② 与等差数列类似，等比数列还有一个求和公式，即

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1).$$

可以让学生自己推出这个公式，并分析两个公式各适用于什么情况.

③ 有了等比数列的通项公式和前 n 项和公式，如果已知 a_1、a_n、q、n、S_n 五个量中的任意三个，就可以求出其余的两个，这其中渗透了方程的思想. 正如教科书边空中的设计，可以把对这个问题的探究留给学生.

2. 例题的教学建议

(1) 例 1 的教学：

① 第 (1) 题是对等比数列的前 n 项和公式的直接应用；

② 第 (1) 题已知 $a_1=27$，$n=8$，还缺少一个已知条件；由题意显然可以通过解方程求得公比 q. 教科书在题设中要求 $q<0$，一方面是为了简化计算，另一方面是想提醒学生 q 既可为正数，又可为负数.

(2) 例 2 的教学：

① 从实际背景的角度讲，本例的设计一方面是想让学生了解计算机日益普及，其销售量越来越大；另一方面，对于一个商场来讲，为实现一定的商品销售目标而制定计划也是一件自然的事情.

② 从数学知识应用的角度讲，本例的解答先根据等比数列的前 n 项和公式列方程，再用对数的知识解方程.

(3) 例 3 的教学：

① 本例是一道关于一般数列求和的应用题. 教科书在本例前设制了一个留空的探究，意与本例中的计算机程序相呼应. 由于一般数列的前 n 项和从形式上也构成了一个数列，且由前 n 项和的定义

$$S_1=a_1,$$

$$S_2=a_1+a_2,$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3,$$

……

$$S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1},$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n.$$

因此可得递推公式

$$\begin{cases}S_1=a_1,\\ S_n=S_{n-1}+a_n(n>1).\end{cases}$$

上述探索过程可以留给学生. 同时还可以向学生指出上述递推公式提供了求数列的首项和第 n 项的办法，即 $a_1=S_1$，$a_n=S_n-S_{n-1}$.

② 本例题设中的计算机程序用循环结构给出数列并求数列的和，数列的求和使用了 S_n 的递推公式. 这样设计的目的，一方面是想使学生体会到循环结构既可用于数列描述，又可用于数列求和（即本例的第(1)题），另一方面是给学生一个用计算机求一般数列前 n 项和的例子（即本例的第(2)题）.

③ 对本例第(2)题的解答还体现了无限逼近的思想，即$[0,3]$区间分得越细，前 k 个矩形面积的和 SUM 就越接近函数图象在第一象限围成区域的面积 X. 当然，教学中不必向学生过多地介绍这些内容.

三、习题解答

练习（第 66 页）

1. (1) $S_6=\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{3(1-2^6)}{1-2}=189.$

(2) $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{-2.7-\frac{1}{90}\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\dfrac{91}{45}.$

2. 设这个等比数列的公比为 q，

$$\begin{aligned}S_{10}&=(a_1+a_2+\cdots+a_5)+(a_6+a_7+\cdots+a_{10})\\&=S_5+q^5S_5\\&=(1+q^5)S_5\\&=50,\end{aligned}\qquad①$$

同理，

$$S_{15}=S_{10}+q^{10}S_5.\qquad②$$

因为 $S_5=10$，所以由①得

$$q^5=\frac{S_{10}}{S_5}-1=4\Rightarrow q^{10}=16.$$

代入②，得

$$S_{15}=S_{10}+q^{10}S_5=50+16\times10=210.$$

3. 该市近 10 年每年的国内生产总值构成一个等比数列，首项 $a_1=2\,000$，公比 $q=1.1$.
设近 10 年的国内生产总值是 S_{10}，则

$$S_{10}=\frac{2\,000(1-1.1^{10})}{1-1.1}\approx3.187\times10^4(\text{亿元}).$$

习题 2.5（第 69 页）

A 组

1. (1) 由

$$q^3=\frac{a_4}{a_1}=\frac{64}{-1}=-64,$$

解得 $q=-4$.

所以

$$S_4=\frac{a_1-a_4q}{1-q}=\frac{-1+64\times4}{1+4}=51.$$

(2) 因为

$$S_3=a_1+a_2+a_3=a_3(q^{-2}+q^{-1}+1),$$

所以

$$q^{-2}+q^{-1}+1=3,$$

即

$$2q^2-q-1=0.$$

解这个方程，得 $q=1$ 或 $q=-\frac{1}{2}$.

当 $q=1$ 时，$a_1=\frac{3}{2}$；当 $q=-\frac{1}{2}$时，$a_1=6$.

2. 这 5 年的产值是一个以 $a_1=138\times1.1=151.8$ 为首项，$q=1.1$ 为公比的等比数列，所以 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{151.8\times(1-1.1^5)}{1-1.1}\approx926.754$(万元).

3. (1) 第 1 个正方形的面积为 4 cm²，第 2 个正方形的面积为 2 cm²，…，这是一个以 $a_1=4$ 为首项，$q=\frac{1}{2}$为公比的等比数列．所以第 10 个正方形的面积为

$$a_{10}=a_1q_9=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=2^{-7}(\text{cm}^2).$$

(2) 这 10 个正方形的面积和为

$$S_{10}=\frac{a_1-a_{10}q}{1-q}=\frac{4-2^{-8}}{1-2^{-1}}=8-2^{-7}(\text{cm}^2).$$

4. (1) 当 $a=1$ 时，

$$\begin{aligned}(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)&=-1-2-\cdots-(n-1)\\&=-\frac{(n-1)n}{2}.\end{aligned}$$

当 $a\neq1$ 时，$(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)=(a+a^2+\cdots+a^n)-(1+2+\cdots+n)$

$$=\frac{a(1-a^n)}{1-a}-\frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) $(2-3\times5^{-1})+(4-3\times5^{-2})+\cdots+(2n-3\times5^{-n})$

$=2(1+2+\cdots+n)-3(5^{-1}+5^{-2}+\cdots+5^{-n})$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-3\times\frac{5^{-1}(1-5^{-n})}{1-5^{-1}}$

$=n(n+1)-\frac{3}{4}(1-5^{-n})$.

(3) 设 $S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$， ①

则

$$xS_n=x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n. \qquad ②$$

①－②，得

$$(1-x)S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n. \qquad ③$$

当 $x=1$ 时，

$$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

当 $x\neq1$ 时，由③得

$$S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}.$$

5. (1) 第 10 次着地时，经过的路程为

$$\begin{aligned}&100+2(50+25+\cdots+100\times2^{-9})\\&=100+2\times100(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-9})\\&=100+200\times\frac{2^{-1}(1-2^{-9})}{1-2^{-1}}\\&\approx299.61(\text{m}).\end{aligned}$$

(2) 设第 n 次着地时，经过的路程为 293.75 m，则

$$\begin{aligned}&100+2\times100(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-(n-1)})\\&=100+200\times\frac{2^{-1}(1-2^{-(n-1)})}{1-2^{-1}}\\&=293.75,\end{aligned}$$

所以 $300-200\times2^{1-n}=293.75$，解得 $2^{1-n}=0.031\,25$，所以 $1-n=-5$，则 $n=6$.

6. 证明：因为 S_3，S_9，S_6 成等差数列，所以公比 $q\neq1$，且 $2S_9=S_3+S_6$，即

$$2\times\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}.$$

于是

$$2q^9=q^3+q^6,$$

即

$$2q^6=1+q^3.$$

上式两边同乘以 a_1q，得

$$2a_1q^7=a_1q+a_1q^4,$$

即

$$2a_8=a_2+a_5,$$

所以 a_2，a_8，a_5 成等差数列.

B 组

1. 证明：

$$\begin{aligned}&a^n+a^{n-1}b+\cdots+b^n\\&=a^n\left(1+\frac{b}{a}+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)\\&=a^n\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{b}{a}}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.\end{aligned}$$

2. 证明：因为

$$S_{14}-S_7=a_8+a_9+\cdots+a_{14}=q^7(a_1+a_2+\cdots+a_7)=q^7S_7,$$
$$S_{21}-S_{14}=a_{15}+a_{16}+\cdots+a_{21}=q^{14}(a_1+a_2+\cdots+a_7)=q^{14}S_7,$$

所以 S_7，$S_{14}-S_7$，$S_{21}-S_{14}$ 成等比数列.

3. (1) 环保部门每年对废旧物资的回收量构成一个等比数列，首项为 $a_1=100$，公比为 $q=1.2$. 所以，2010 年能回收的废旧物资为

$$a_9=100\times 1.2^8\approx 430(\mathrm{t}).$$

(2) 从 2002 年到 2010 年底，能回收的废旧物资为

$$S_9=\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\frac{100(1-1.2^9)}{1-1.2}\approx 1\,650(\mathrm{t}),$$

可节约的土地为

$$1\,650\times 4=6\,600(\mathrm{m}^2).$$

4. (1) 依教育储蓄的方式，应按照整存整取定期储蓄存款利率计息，免征利息税，且若每月固定存入 a 元，连续存 n 个月，计算利息的公式为

$$\frac{(a+na)n}{2}\times\text{月利率}.$$

因为整存整取定期储蓄存款年利率为 2.52%，月利率为 0.21%，故到期 3 年时一次可支取本息共

$$\frac{(50+50\times 36)\times 36}{2}\times 0.21\%+1\,800$$
$$=1\,869.93(\text{元}).$$

若连续存 6 年，应按五年期整存整取定期储蓄存款利率计息，具体计算略.

(2) 略.

(3) 每月存 50 元，连续存 3 年，按照"零存整取"的方式，年利率为 1.89%，且需支付 20% 的利息税，所以到期 3 年时一次可支取本息共 1 841.96 元，比教育储蓄的方式少收益 27.97 元.

(4) 设每月应存入 x 元，由教育储蓄的计算公式得

$$\frac{36(x+36x)}{2}\times 0.21\%+36x=10\,000,$$

解得 $x\approx 267.39$(元)，即每月应存入 267.39 元.

(5) 略.

(6) 略.

(7) 略.

(8) 略.

说明 教育储蓄为零存整取定期储蓄存款，存期分为一年、三年和六年. 最低起存金额为 50 元，本金合计最高限额为 2 万元. 开户时储户应与金融机构约定每月固定存入的金额，分月存入，中途如有漏存，应在次月补齐，未补存者按零存整取定期储蓄存款的有关规定办理. 教育储蓄实行利率优惠，一年期、三年期教育储蓄按开户日同期同档次整存整取定期储蓄存款利率计息，六年期按开户日五年期整存整取定期储蓄存款利率计息，免征利息税. 第 (8) 题可以选择多种储蓄方式，学生可能提供多个结果，只要他们的计算方式符合银行规定的储蓄方式即可. 教师可以组织学生讨论，然后选择一个最佳答案.

5. 设每年应存入 x 万元，那么 2004～2010 年底本利和依次为：

$$a_1=1.02x,$$
$$a_2=(1.02+1.02^2)x,$$
$$a_3=(1.02+1.02^2+1.02^3)x,$$

……

$$a_7=(1.02+1.02^2+\cdots+1.02^7)x.$$

将以上各项相加，得

$$S_7=(7\times1.02+6\times1.02^2+5\times1.02^3+\cdots+1.02^7)x. \qquad ①$$

由①×1.02，得

$$1.02S_7=(7\times1.02^2+6\times1.02^3+5\times1.02^4+\cdots+1.02^8)x. \qquad ②$$

②－①，得

$$\begin{aligned}1.02S_7-S_7&=(-7\times1.02+1.02^2+1.02^3+1.02^4+\cdots+1.02^7+1.02^8)x\\&=\left(-8\times1.02+\frac{1.02^9-1.02}{1.02-1}\right).\end{aligned}$$

故 $S_7=(-2\ 958+1.02^9\times2\ 500)x$．由 $S_7=40$，解得 $x\approx1.35$(万元)．

答：每年大约应存人1.35万元．

探究与发现　购房中的数学——参考解答

方案1　如果首付3.6万(约为住房总价值的30%)，贷款8.4万，季利率为5.04%÷4＝1.26%．以贷款期为15年为例．

每季等额归还本金：

$$84\ 000\div(15\times4)=1\ 400(元).$$

第1个季度利息：

$$84\ 000\times1.26\%=1\ 058.4(元),$$

则第1个季度还款额为

$$1\ 400+1\ 058.4=2\ 458.4(元);$$

第2个季度利息：

$$(84\ 000-1\ 400\times1)\times1.26\%=1\ 040.76(元),$$

则第2个季度还款额为

$$1\ 400+1\ 040.76=2\ 440.76(元);$$

……

第60个季度利息：

$$(84\ 000-1\ 400\times59)\times1.26\%=17.64(元),$$

则第60个季度（最后一期）的还款额为

$$1\ 400+17.64=1\ 417.64(元).$$

可见，15年中每个季度支付的利息成等差数列，公差为17.64元，其和为：

$$\frac{(1\ 058.4+17.64)\times60}{2}=32\ 281.2(元);$$

15年中每个季度的还款额也成等差数列，公差为17.64元，其和为：

$$\frac{(2\ 458.4+1\ 417.64)\times60}{2}=116\ 281.2(元)$$

方案2　因为首付4万，所以需要贷款10.2万，季利率为5.04%÷4＝1.26%．以贷款期为15年为例．

每季等额归还本金：

$$102\ 000\div(15\times4)=1\ 700(元).$$

第1个季度利息：

$$102\,000\times1.26\%=1\,285.2(\text{元}),$$

则第1个季度还款额为

$$1\,700+1\,285.2=2\,985.2(\text{元});$$

第2个季度利息：

$$(102\,000-1\,700\times1)\times1.26\%=1\,263.78(\text{元}),$$

则第2个季度还款额为

$$1\,700+1\,263.78=2\,963.78(\text{元});$$

……

第60个季度利息：

$$(102\,000-1\,700\times59)\times1.26\%=21.42(\text{元}),$$

则第60个季度（最后一期）的还款额为

$$1\,700+21.42=1\,721.42(\text{元}).$$

可见，15年中每个季度支付的利息成等差数列，公差为21.42元，其和为：

$$\frac{(1\,285.2+21.42)\times60}{2}=39\,198.6(\text{元});$$

15年中每个季度的还款额也成等差数列，公差为21.42元，其和为：

$$\frac{(2\,985.2+1\,721.42)\times60}{2}=141\,198.6(\text{元})$$

（或：$102\,000+39\,198.6=141\,198.6(\text{元})$）.

结论：建议这个居民采用方案1，理由如下：

(1) 因为这个居民每月的家庭总收入为3 000元，那么每个月用于偿还购房贷款的金额为600～900元较为合适，每个季度为1 800～2 700元.

如果采用方案1，满足上述条件.

如果采用方案2，由于15年中每季度需支付的还款额构成一个首项为 $a_1=2\,985.2$，公差为 $d=21.42$ 的等差数列. 若

$$a_n=2\,985.2+21.42(n-1)>2\,700,$$

则 $n<15$. 也就是说，当 $n<15$(个季度)时，每个季度的还款额大于2 700元，即在大于11年的时间内，偿还银行的钱占这个家庭收入的30%以上，显然给家庭生活造成了较大的负担.

(2) 以贷款15年为例，方案2比方案1需要多支付利息 $39\,198.6-32\,281.2=6\,917.4$ 元.

(3) 方案2中的住房是旧房，使用年限较短.

说明 学生也可能列出其他的还款方式，或提出其他的理由. 如选择方案2，并且提出相应的理由，只要可以利用数列知识“自圆其说”就可以.

复习参考题（第75页）解答

A组

1. (1) B；　(2) B；　(3) B；　(4) A.

2. (1) $a_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$；

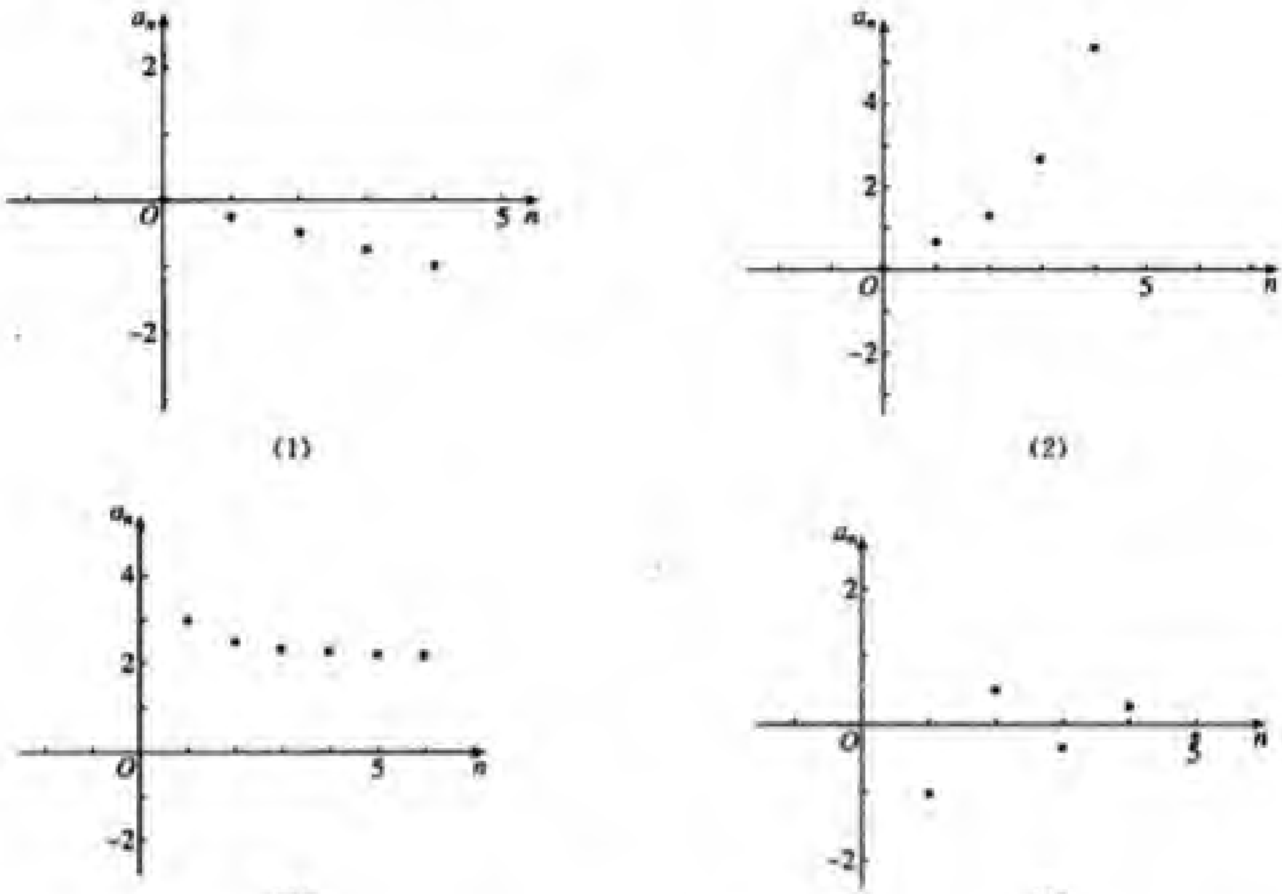
(2) $a_n=1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2}$；

(3) $a_n=(10^n-1)\dfrac{7}{9}$；

(4) $a_n=\sqrt{1+(-1)^n}$，或$\sqrt{1+\cos n\pi}$.

说明 以上各题的通项公式不一定唯一.

3.



(1) (2) (3) (4)

(第3题)

4. 如果 a，b，c 成等差数列，则 $b=5$；如果 a，b，c 成等比数列，则 $b=1$，或 -1.

5. a_n 按顺序输出的值为：12，36，108，324，972. $sum=86\ 093\ 436$.

6. 2 m.

7. $138.1\times(1+0.13\%)^8=1\ 396.3$ 万.

8. 从12月20日到次年的1月1日，共13天. 每天领取的奖品价值呈等差数列分布. $d=10$. $a_1=100$. 由 $S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$ 得：$S_{13}=100\times13+\frac{13\times12}{2}\times10=2\ 080>2\ 000$. 所以第二种领奖方式获奖者受益更多.

9. $a_2+a_8=a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5$，所以，

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=450=\frac{5}{2}(a_2+a_8),$$

则 $a_2+a_8=180$.

10. 容易得到 $a_n=10n$，$S_n=\frac{10+10n}{2}\times10=1\ 200$，得 $n=15$.

11. (1) $S_2=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}=(a_1+nd)+(a_2+nd)+\cdots+(a_n+nd)$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_n+n\times nd=S_1+n^2d.$$

$S_3=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}=(a_1+2nd)+(a_2+2nd)+\cdots+(a_n+2nd)$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_n+n\times2nd=S_1+2n^2d.$$

容易验证 $2S_2=S_1+S_3$. 所以，S_1，S_2，S_3 也是等差数列，公差为 n^2d.

(2) $S_2=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}=(a_1\times q^n)+(a_2\times q^n)+\cdots+(a_n\times q^n)$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)q^n=S_1\times q^n.$$

$S_3=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}=(a_1\times q^{2n})+(a_2\times q^{2n})+\cdots+(a_n\times q^{2n})$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)q^{2n}=S_1\times q^{2n}.$$

容易验证：$S_2^2=S_1\times S_3$. 所以 S_1，S_2，S_3 也是等比数列，公比为 q^n.

12. $a_1=f(x+1)=(x+1)^2-4(x+1)+2=x^2-2x-1$

$a_3=f(x-1)=(x-1)^2-4(x-1)+2=x^2-6x+7$

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以，a_1、a_2、a_3 也是等差数列. 所以

$$2a_2=a_1+a_3.$$

即

$$0=2x^2-8x+6.$$

解得

$$x=1，\text{或 } x=3.$$

$x=1$ 时，$a_1=-2$，$a_2=0$，$a_3=2$. 由此可求出 $a_n=2n-4$.

$x=3$ 时，$a_1=2$，$a_2=0$，$a_3=-2$. 由此可求出 $a_n=4-2n$.

13. 设这家牛奶厂每年应扣除 x 万元消费基金，

2002 年底剩余资金是 $1\,000(1+50\%)-x$；

2003 年底剩余资金是 $[1\,000(1+50\%)-x](1+50\%)-x$

$=1\,000(1+50\%)^2-(1+50\%)x-x$，

……

5 年后达到资金

$$1\,000(1+50\%)^5-(1+50\%)^4x-(1+50\%)^3x-(1+50\%)^2x-(1+50\%)x$$
$$=2\,000，$$

解得

$$x=459(\text{万元}).$$

B 组

1. (1) B；　　(2) D.

2. (1) 不成等差数列. 可以从图象上解释. a，b，c 成等差，则通项公式为 $y=pn+q$ 的形式，且 a，b，c 位于同一直线上，而 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ 的通项公式却是 $y=\frac{1}{pn+q}$ 的形式，$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ 不可能在同一直线上，因此肯定不是等差数列.

(2) 成等比数列. 因为 a，b，c 成等比，有 $b^2=ac$.

又由于 a，b，c 非零，两边同时取倒数，则有

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{ac}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{c}.$$

所以 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ 也成等比数列.

3. 体积分数：$0.033\times(1+25\%)^9\approx0.126$，质量分数：$0.05\times(1+25\%)^9\approx0.191$.

4. 设工作时间为 n，三种付费方式的前 n 项和分别为 A_n，B_n，C_n. 第一种付费方式为常数列；第二种付费方式为首项是 4，公差也为 4 的等差数列；第三种付费方式为首项是 0.4，公比为 2 的等比数列. 则 $A_n=38n$.

$$B_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4=2n^2+2n,$$

$$C_n=\frac{0.4(1-2^n)}{1-2}=0.4(2^n-1).$$

下面考察 A_n，B_n，C_n 看出 $n<10$ 时，$38n>0.4(2^n-1)$．因此，当工作时间小于 10 天时，选用第一种付费方式．$n\geqslant 10$ 时，$A_n\leqslant C_n$，$B_n\leqslant C_n$．因此，选用第三种付费方式．

5. 第一星期选择 A 种菜的人数为 n，即 $a_1=n$，选择 B 种菜的人数为 $500-a$．所以有以下关系式：

$$a_2=a_1\times 80\%+b_1\times 30\%,$$
$$a_3=a_2\times 80\%+b_2\times 30\%,$$
$$\cdots$$
$$a_n=a_{n-1}\times 80\%+b_{n-1}\times 30\%,$$
$$a_n+b_n=500.$$

所以，

$$a_n=150+\frac{1}{2}a_{n-1},$$

$$b_n=500-a_n=350-\frac{1}{2}a_{n-1},$$

如果 $a_1=300$，则 $a_2=300$，$a_3=300$，…，$a_{10}=300$.

III 自我检测题

（45 分钟）

一、选择题（每题 8 分）

1. 已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等比数列，那么（　　）

(A) $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$都一定是等比数列.

(B) $\{a_n+b_n\}$一定是等比数列，但$\{a_n\cdot b_n\}$不一定是等比数列.

(C) $\{a_n+b_n\}$不一定是等比数列，但$\{a_n\cdot b_n\}$一定是等比数列.

(D) $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$都不一定是等比数列.

2. 数列 0，0，0，…，0，…（　　）

(A) 是等差数列但不是等比数列.

(B) 是等比数列但不是等差数列.

(C) 既是等差数列又是等比数列.

(D) 既不是等差数列又不是等比数列.

3. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=a^n-1$（a 是不为 0 的实数），那么$\{a_n\}$（　　）

(A) 一定是等差数列.

(B) 一定是等比数列.

(C) 或者是等差数列，或者是等比数列.

(D) 既不可能是等差数列，也不可能是等比数列.

4. 等差数列$\{a_n\}$的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它的前 $3m$ 项的和为（　　）

(A) 130. (B) 170. (C) 210. (D) 260.

5. 若 a，b，c 成等比数列，则函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交点的个数是（ ）

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 0 或 2.

二、填空题（每题 8 分）

1. 等差数列$\{a_n\}$中，$a_p=q$，$a_q=p$，(p，$q\in\mathbf{N}$，且 $p\neq q$)，则 $a_{p+q}=$________；
2. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=5$，$a_{n+1}=a_n+3$，那么这个数列的通项公式是________；
3. 等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=12$，$a_5=48$，那么 $a_7=$________；
4. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 m 项和 $S_m=10$，$S_{2m}=30$，则 $S_{3m}=$________.

三、解答题（每题 14 分）

1. 已知 a_1，a_2，a_3，a_4 成等比数列，且 $a_1=a_2+36$，$a_3=a_4+4$，求 a_1，a_2，a_3，a_4.

2. 等差数列$\{a_n\}$中，前 n 项和为 S_n，$a_1>0$，且 $S_{12}>0$，$S_{13}<0$. 则 n 为何值时，S_n 最大？

参考解答及说明

一、选择题

题号	1	2	3	4	5
答案	C	A	C	C	A

解析

1. 本题考查等比数列的性质：两个等比数列的乘积仍是一个等比数列.
2. 本题考查常数数列与等差数列、等比数列的关系：非 0 常数列既是等差数列又是等比数列.
3. 本题考查给出一般数列的前 n 项和，如何求其通项.
4. 本题考查等差数列的性质：S_n、$S_{2n}-S_n$、$S_{3n}-S_{2n}$仍成等差.
5. 本题考查等比中项的知识.

二、填空题

1. 0.

本题考查等差数列的性质：等差数列是个一次函数，它的图象是相应直线上自变量取正整数时的点，公差就是直线的斜率. 因此，根据两点确定一直线，可得：

$$d=\frac{a_p-a_q}{p-q}=-1.$$

2. $3n+2$.

3. 192.

本题考查等比数列的性质：下标成等差则项成等比，即 a_{n-k}，a_k，a_{n+k}仍为等比数列.

4. 70.

本题考查等比数列的这样一个性质：S_n、$S_{2n}-S_n$、$S_{3n}-S_{2n}$仍成等比.

三、解答题

1. $q=\pm\frac{1}{3}$，因此有 2 组解. 54，18，6，2；或者 27，-9，3，-1.

2. S_6 最大.

本题考查的是等差数列前 n 项和是一个过原点的关于 n 的二次函数. 由已知条件，容易判断公差 $d<0$. 因此，抛物线开口向下；设 m 是抛物线与 n 轴的另一个交点. 则 $12<m<13$. 则抛物线对称轴 $6<\frac{m}{2}<6.5$. 因为 n 应为正整数，所以 S_6 最大.

Ⅳ 拓展资源

一、斐波那契数列

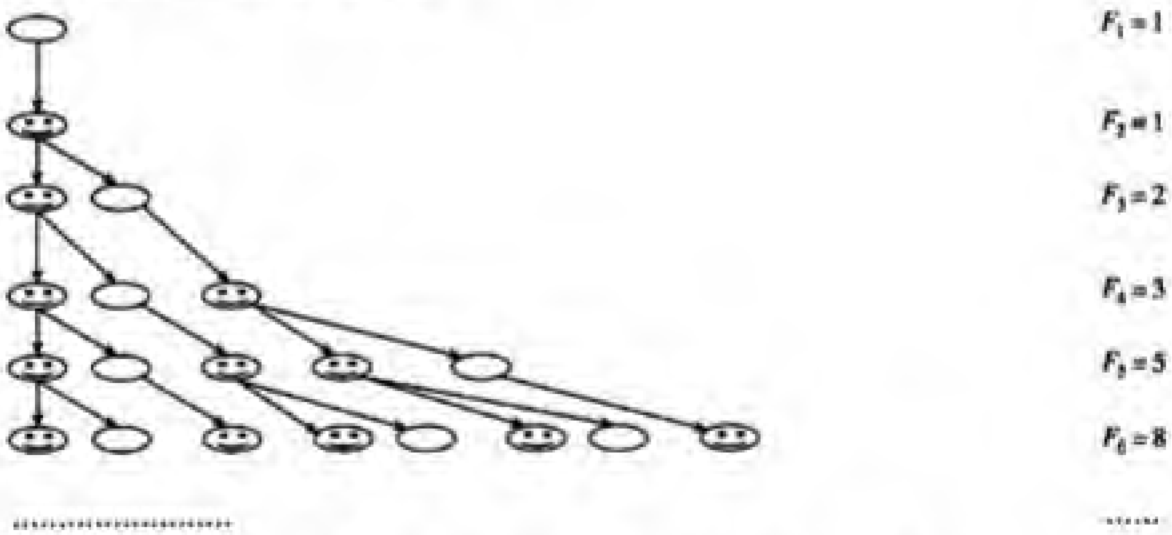
斐波那契数列最初由意大利数学家列昂那多·斐波那契于 1202 年兔子繁殖问题中提出来，为纪念他，将此数列称为斐波那契数列. 为帮助更好的理解此数列，我们也可以这样描述：

假定一个月大小的一对兔子（雄和雌的）对于繁殖还太年轻，但两个月大小的兔子便足够成熟. 又假定从第二个月开始，每个月它们都繁殖一对新的兔子（正好是雌雄一对），如果每一对兔子的繁殖都按照上面的方式，从开始起每个月有多少对兔子呢?

我们可以借助图表表示：

⊙⊙ 一对可繁殖的兔子

○ 一对对于繁殖尚太年轻的兔子



斐波那契数列是从第 2 项起，每一项都等于它前面两项和的数列. 公式为：

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 3)$$

1. 意大利数学家列昂那多·斐波那契人物背景简介

斐波那契是中世纪占主导地位的数学家之一，他在算术、代数和几何等方面多有贡献. 他生于比萨的列奥纳多家族(1175—1250)，是一位意大利海关设在南部非洲布吉亚的官员的儿子. 由于他父亲的工作，使他得以游历了东方和阿拉伯的许多城市. 而在这些地区，斐波那契熟练地掌握了印度—阿拉伯的十进制系统，该系统具有位置值并使用了零的符号. 在那时，意大利仍然使用罗马数字进行计算. 斐波那契看到了这种美丽的印度—阿拉伯数字的价值，并积极地提倡使用它们. 公元 1202 年，他写了《算盘书》一书，这是一本广博的工具书，其中说明了怎样应用印度—阿拉伯数字，以及如何用

它们进行加、减、乘、除计算和解题，此外还对代数和几何进行了进一步的探讨．意大利商人起初不愿意改变老的习惯，后来通过对阿拉伯数字不断地接触，加上斐波那契和其他数学家的工作，终使印度—阿拉伯数字系统得以在欧洲推广，并被缓慢地接受．

斐波那契在今天的著名，是缘于一个数列．而这个数列则来自他的《算盘书》中一道并不出名的问题．他当时写这道题只是考虑作为一个智力练习．然而，到了19世纪，法国数学家E·卢卡斯出版了一部四卷本的有关娱乐数学方面的著作时，才把斐波那契的名字，加到该问题的解答和所出现的数列上去．

2. 与斐波那契数列相关的自然现象

向日葵花瓣．它依两个方向螺旋形排列，朝一个螺旋方向生长的花瓣数同朝相反螺旋方向生长的花瓣数，几乎总等于斐波那契数列中两个相邻的数．

松树松果．果鳞的排列呈螺旋状，各螺旋线上果鳞的数目，构成斐波那契数列．

一些花的花瓣数构成斐波那契数列中的一串数字：百合花（3个花瓣），梅花（5个花瓣），飞燕草（8个花瓣），万寿菊（13个花瓣），紫苑（21个花瓣），等等．

3. 与斐波那契数列相关的问题

（1）斐波那契数列与黄金分割

斐波那契数列：1，1，2，3，5，21，34，55，89，…．

前一项与后一项的比值：

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{1}{1}=1,\ \frac{F_2}{F_3}=\frac{1}{2}=0.5$$

$$\frac{F_3}{F_4}=\frac{2}{3}=0.\dot{6},\ \frac{F_4}{F_5}=\frac{3}{5}=0.6$$

$$\frac{F_5}{F_6}=\frac{5}{8}=0.625,\ \frac{F_6}{F_7}=\frac{8}{13}=0.615$$

……

相邻两数的比交替地大于或小于黄金比$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\right)$，并且该比值无限趋近于黄金比．

（2）其他相关问题和结论：

① 上一个n阶台阶，若每次可以上一级或两级，求上法总数$f(n)$？

② 一条直线将平面分成2个部分，两条直线最多将平面分成4个部分，3条直线最多将平面分成7个部分，n条直线呢？

③ 你只有1角和2角的邮票，要想得到1角、2角、3角、4角……的邮资，共有多少种不同的方式？（邮票要正贴、相连，考虑顺序）

④ 其他有趣的结论

$$F_1+F_2+\cdots+F_{10}=11F_7,$$
$$F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1,$$
$$F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_{n-2}=F_{2n-1},$$
$$F_{n-1}^2+F_n^2=F_{2n-1}.$$

其他与斐波那契数列相关的问题，有兴趣的学生可自行查阅相关资料．

二、《张丘建算经》中的等差数列求和

我国数列求和的概念起源很早，《周髀算经》里谈到“没日影”时，已出现了简单的等差数列；

《九章算术》中的一些问题反映出当时已形成了数列求和的简单概念. 到南北朝时，张丘建始创等差数列求和解法. 他在《张丘建算经》里给出了几个等差数列问题.

例如："今有女子不善织布，逐日所织的布以同数递减，初日织五尺，末一日织一尺，计织三十日，问共织几何?" 对于这个问题，原书的解法是："并初、末日织布数，半之，余以乘织讫日数，即得." 这个解法相当于给出了等差数列的求和公式 $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

再如："今有女子善织布，逐日所织的布以同数递增，初日织五尺，计织三十日，共织九匹三丈，问日增几何?" 书中给出了计算公式，公式等价于现今中学课本里的公式：

$$S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

和

$$d=\left(\frac{2S_n}{n}-2a_1\right)\div(n-1).$$

第三章 不等式

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

不等关系与相等关系都是客观事物的基本数量关系，是数学研究的重要内容. 建立不等观念，处理不等关系与处理等量问题是同样重要的. 在本章中，学生将通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，理解不等式（组）对于刻画不等关系的意义和价值；掌握求解一元二次不等式的基本方法，并能解决一些实际问题；能用一元二次不等式组表示平面区域，并尝试解决简单的二元线性规划问题，认识基本不等式及其简单应用；体会不等式、方程及函数之间的联系.

2. 学习目标

（1）不等关系：通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的数量关系、了解不等式（组）的实际背景.

（2）一元二次不等式：经历从实际情境中抽象出一元二次不等式模型的过程；通过函数图象了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系；会解一元二次不等式，对给定的一元二次不等式，尝试设计求解的程序框图.

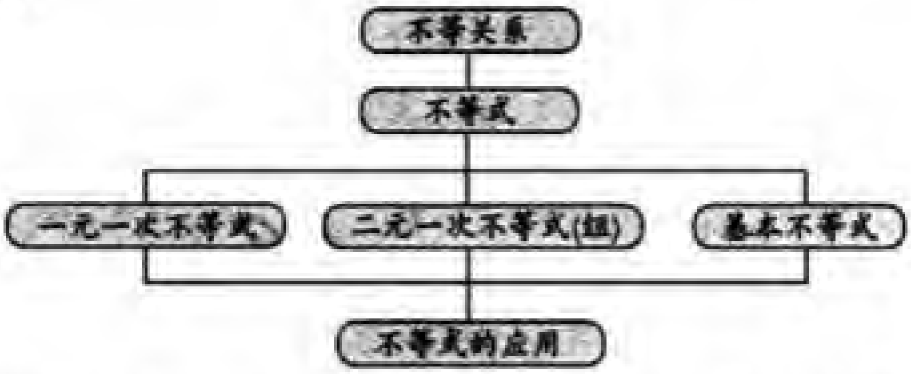
（3）二元一次不等式组与简单线性规划问题

从实际情境中抽象出二元一次不等式组；了解二元一次不等式的几何意义，能用平面区域表示二元一次不等式组；从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题，并能加以解决.

（4）探索基本不等式的证明过程；会用基本不等式解决简单最大（小）值问题.

二、本章内容安排

1. 本章知识结构如下：



2. 不等关系在现实世界、在我们的日常生活中大量存在着．事实上，任何人都需要对发生在我们周围的事物做出某种判断，判断有时需借助于量与量的比较来实现，这就是不等关系在本章内容的地位与作用．而完成量与量比较的过程就是建立不等式这一数学模型的过程．在这一章中我们将重点研究三种不等式模型，它们是一元二次不等式、二元一次不等式（组）及基本不等式，在了解了这三种不等式的实际背景的前提下，重点研究不等式的应用．

三、课时分配

本章课时约 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1　不等关系（含不等式性质）	约 2 课时
3.2　一元二次不等式及其解法	约 3 课时
3.3　二元一次不等式（组）与简单线性规划问题	约 5 课时
3.4　基本不等式	约 3 课时
小结与复习	约 3 课时

II　教科书分析

教材选用了一幅重叠起伏的壮观画面作章头图，把学生带入到"横看成岭侧成峰，远近高低各不同"的大自然中．图中熔岩喷射出的抛物线状的轨迹与本章的知识建立了密切的联系．体现了新课标中强调的"通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的数量关系，了解不等式（组）的实际背景"精神；用意是唤起学生的学习热情，让学生自由的展开联想．在此基础上，教师应组织学生对不等关系的相关素材，用数学观点进行观察、归纳，使学生在具体情境中感受到不等关系与相等关系一样，现实世界和日常生活中大量存在着．既然不等关系客观存在，又与生产、生活密切相关，这样学生会由衷的产生用数学工具研究不等关系的愿望，从而进入不等式一章的学习．

这一章我们将学习哪些内容呢？这是章引言试图要回答的问题．章引言不仅在于使学生初步了解全章内容的概貌，更注重于阐述为什么要学习这些内容，以及这些内容在数学研究和数学应用中的地

位和作用.

3.1 不等关系与不等式

一、本节知识结构

实际问题中的不等关系

不等式(组)

不等式的基本性质

二、教学重点与难点

重点：用不等式（组）表示实际问题中的不等关系，并用不等式（组）研究含有不等关系的问题. 理解不等式（组）对于刻画不等关系的意义和价值.

难点：是用不等式（组）正确表示出不等关系.

三、编写意图与教学建议

本节的主要内容是通过一系列的具体问题情境，使学生感受到在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，在学生了解了一些不等式（组）产生的实际背景的前提下，学习不等式的有关内容. 另外，教科书以问题方式代替例题，目的也是在强化问题意识，使学生在具体问题情境中学习如何利用不等式研究及表示不等关系. 为了利用不等式研究不等关系，教科书给出了不等式的有关基本性质，教学过程中对不等式基本性质的教学要把握好难度.

本节的编写与传统教材相比，更加关注学生的发展，学生在学习过程中的感受、体验，认识状况及理解程度，注重问题情境、实际背景的设置，力求形式新颖、内容有趣、应用性强. 教科书有意识地在内容的呈现过程中恰时恰点的设计问题，通过学生对问题的探究思考，广泛参与，改变学生学习方式，提高学习质量. 在知识内容方面，删去了高次不等式，无理不等式，削减了若干不等式的性质，增加了一些实际问题及“思考”“探究”栏目.

教科书重视以下方面的几个问题.

1. 使学生感受到不等关系是普遍存在的

教科书依据课程标准中提出的“通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，了解不等式（组）的实际背景”的精神，从学生熟知的平面几何基础知识入手，从日常生活中经常用到的“长与短”、“大与小、多与少、远与近”等的比较，为学生提供较为丰富的实例，使学生认识不等关系是客观存在的广泛的数量关系.

2. 用不等式（组）来表示不等关系

教科书用不等式（组）表示汽车的车速，及产品质量检验中相关含量指标，其意图是使学生认识

到现实中大量的数量关系是可以通过不等式来表示的，不等式是研究不等关系的数学工具，从而理解不等式（组）对于刻画不等关系的意义和价值.

解不等式在解决不等关系中起重要作用，有必要让学生学习不等式的基本性质．教科书给出了不等式的基本性质，及不等式基本性质（3）的证明过程．其余性质的证明可让学有余力的学生自己完成.

教科书给出的不等式的基本性质有：

（1）$a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$；

（2）$a>b\Rightarrow a+c>b+c$；

（3）$a>b$，$c>0\Rightarrow ac>bc$；

（4）$a>b$，$c<0\Rightarrow ac<bc$.

性质（1）是不等式的传递性；性质（2）表明同向不等式具有可加性；性质（3）（4）表明，不等式两边允许用非零数（或式）乘，相乘后的不等式的方向取决于乘式的符号．教学中可以把不等式的性质与等式的性质作比较.

教材“思考”栏目中要求利用上述不等式的基本性质证明以下性质：

（1）$a>b$，$c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

（2）$a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow ac>bd$；

（3）$a>b>0$，$n\in\mathbf{N}$，$n>1\Rightarrow a^n>b^n$；$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

事实上，上面的性质（1），可利用不等式的基本性质（2）得到；性质（2）（3）可利用不等式的基本性质（3）得到.

本节教学中应注意以下几点：

1. 教师要认真体会章头图这一具体情境中蕴含的不等关系，明确不等关系及不等式的教学应该建立在实际问题的背景之上，教学的重点应放在教科书上提供的学生感兴趣的和富有时代感的素材上，同时教师可指导学生进一步挖掘一些实际素材，切实做到让学生在具体情境中学习不等式，注重让学生感受不等关系的普遍存在及学习不等式的意义.

2. 教学中在引入一些简单不等关系的基础上，问题1～3的使用可让学生在独立探究的基础上展开并充分讨论，建立起不等关系的模型，特别是体会所设未知数本身的实际意义．让学生体会如何用不等式（组）表示不等关系，以体现重视数学知识的形成过程.

3. 不等式的基本性质既是实数理论的发展，又是解不等式的基础，因此教学中应适当给予关注，特别是不等式的证明过程对学生来讲是一个难点，从逻辑关系上应给予充分的分析.

四、习题解答

练习（第82页）

1.（1）$a+b\geqslant 0$；（2）$h\leqslant 4$；（3）$\begin{cases}(L+10)(W+10)=350,\\ L>4W.\end{cases}$

2. 这个两位数是57.

3.（1）$>$；　（2）$<$；　（3）$>$；　（4）$<$.

习题3.1（第83页）

A组

1. 略.

2. (1) $2+\sqrt[3]{7}<4$；

(2) $\sqrt{7}+\sqrt{10}>\sqrt{3}+\sqrt{14}$.

3. 证明：因为 $x>0$，$\frac{x^2}{4}>0$，

所以

$$\frac{x^2}{4}+x+1>x+1>0,$$

因为

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^2>(\sqrt{1+x})^2>0,$$

所以

$$1+\frac{x}{2}>\sqrt{1+x}.$$

4. 设 A 型号帐篷有 x 个，则 B 型号帐篷有 $(x+5)$ 个，

$$\begin{cases} x>0, \\ x+5>0, \\ 4x<48, \\ 0<5x-48<5, \\ 3(x+5)<48, \\ 4(x+4)>48. \end{cases}$$

5. 设方案的期限为 n 年时，方案 B 的投人不少于方案 A 的投人，所以

$$5n+\frac{n(n-1)}{2}\times 10\geqslant 500,$$

即

$$n^2\geqslant 100.$$

B 组

1. (1) 因为 $2x^2+5x+9-(x^2+5x+6)=x^2+3>0$，

所以

$$2x^2+5x+9>x^2+5x+6.$$

(2) 因为 $(x-3)^2-(x-2)(x-4)=(x^2-6x+9)-(x^2-6x+8)=1>0$，

所以

$$(x-3)^2>(x-2)(x-4).$$

(3) 因为 $$x^3-(x^2-x+1)=(x-1)(x^2+1)>0,$$

所以

$$x^3>x^2-x+1.$$

(4) 因为
$$\begin{aligned} &x^2+y^2+1-2(x+y-1) \\ =&x^2+y^2+1-2x-2y+2 \\ =&(x-1)^2+(y-1)^2+1>0, \end{aligned}$$

所以

$$x^2+y^2+1>2(x+y-1).$$

2. 证明：因为 $$a>b>0,\ c>d>0,$$

所以

$$ac>bd>0.$$

又因为

$$cd>0.$$

所以

$$\frac{1}{cd}>0.$$

于是，

$$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0.$$

所以，

$$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

3. 设安排甲种货箱 x 节，乙种货箱 y 节，总运费为 z. 所以

$$\begin{cases}35x+25y\geqslant 1\,530,\\15x+35y\geqslant 1\,150,\\x+y=50.\end{cases}$$

所以

$$x\geqslant 28，且\ x\leqslant 30.$$

所以

$$\begin{cases}x=28,\\y=22.\end{cases}或\begin{cases}x=29,\\y=21.\end{cases}或\begin{cases}x=30,\\y=20.\end{cases}$$

所以共有三种方案，方案一安排甲种货箱 28 节，乙种货箱 22 节；方案二安排甲种货箱 29 节，乙种货箱 21 节；方案三安排甲种货箱 30 节，乙种货箱 20 节.

当$\begin{cases}x=30,\\y=20\end{cases}$时，总运费

$$z=0.5\times30+0.8\times20=31(万元)$$

此时运费最少.

3.2 一元二次不等式及其解法

一、本节知识结构

从实际问题中建立一元二次不等式

解一元二次不等式

二、教学重点与难点

重点：从实际问题中抽象出一元二次不等式模型，围绕一元二次不等式的解法展开，突出体现数

形结合的思想.

难点：理解二次函数、一元二次方程与一元二次不等式解集的关系.

三、编写意图与教学建议

本节的主要内容是一元二次不等式及其解法. 教科书围绕一元二次不等式有关概念的形成过程及一元二次不等式的解法，着重研究了一元二次不等式的解与二次函数、一元二次方程的密切关联.

教科书重视以下方面的几个问题.

1. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式模型的过程

教科书中一元二次不等式的有关概念是通过学生感兴趣的上网问题及计时收费问题引入的，通过让学生比较两种不同的收费方式，抽象出不等关系.

2. 通过函数图象探究一元二次不等式与相应函数、方程的联系

教科书从考察二次函数 $y=x^2-5x$ 与一元二次方程 $x^2-5x=0$ 的关系出发，借助二次函数 $y=x^2-5x$ 图象的直观性，引导学生观察二次函数 $y=x^2-5x$ 图象上任意一点 $P(x, y)$ 在图象上移动时，由点 P 的横坐标 x 的变化引起点 P 的纵坐标 y 的变化情况，获得对一元二次不等式 $x^2-5x<0$ 的解集的感性认识. 有条件的学校可利用信息技术画图象. 对于函数 $y=x^2-5x$ 图象学生是很熟悉的，重要的是要让学生通过观察图象，发现“二次方程的两个根是二次函数的零点”的结论，教师不要包办代替. 关于求一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集，教科书把二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 与 x 轴的三种位置关系及一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 三种情况($\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$)联系在一起，这样处理的意图是考虑到在研究利用二次函数 $y=x^2-5x$ 图象求一元二次不等式 $x^2-5x<0$ 的解集之后，学生对求一元二次不等式的解集在直观上已有了一定的理解. 用判别式判断一元二次方程的根的情况学生在初中也有一定的认知基础，建议对于一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集的学习，有条件的学校可让学生动手操作计算机或计算器，按照教材第 85 页旁白的要求，对图象上任意一点的纵坐标进行跟踪观察，使学生看到点在运动中纵坐标的取值变化情况，通过图象上点的运动变化直观的理解一元二次不等式解集的求法.

3. 对于给定的一元二次不等式，尝试设计求解的程序框图

本节通过观察具体的二次函数图象及与其相应的一元二次方程根的关系，推广出了一般的一元二次不等式解集的求法，并用框图的形式归纳出了“用一元二次不等式”分析和解决实际问题的基本过程.

在求解一元二次不等式过程中，鼓励学生设计求解一元二次方程的程序框图. 为突出算法在数学中的应用，体会算法的基本思想及算法的重要性和有效性，发展有条理思考和表达的能力，提高逻辑思维能力，应鼓励学生独立设计求解一元二次不等式的程序框图.

下面是具有一般形式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 对应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的求根程序.

```
input "a, b, c="; a, b, c
d=b*b-4*a*c
p=-b/(2*a)
q=sqr(abs(d))/(2*a)
```

```
if d<0 then
  print "the result is R"
   else
     x1=p-q
     x2=p+q
       if x1=x2 then
         print "the result is {x/x<>"; p,"}"
       else
         print "the result is {x/x>"; x2,"or x<"; x1,"}"
       endif
  endif
end
```

四、习题解答

练习（第 89 页）

1. (1) $\left\{x\middle|x<-\frac{3}{2}，或x>\frac{5}{2}\right\}$；　(2) $\left\{x\middle|-1\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}\right\}$；

(3) R；　(4) $\{x|x\neq2\}$；

(5) $\left\{x\middle|x\neq\frac{1}{2}\right\}$；　(6) $\left\{x\middle|x<-1，或x>\frac{3}{2}\right\}$；

(7) $\left\{x\middle|x<\frac{5}{4}，或x>\frac{4}{3}\right\}$；　(8) $\left\{x\middle|-\frac{5}{3}<x<0\right\}$.

2. (1) 使 $y=3x^2-6x+2$ 的值等于 0 的集合是$\left\{1-\frac{\sqrt{3}}{3}，1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$；使 $y=3x^2-6x+2$ 的值大于 0 的 x 的集合为$\left\{x\middle|x<1-\frac{\sqrt{3}}{3}，或x>1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$；使 $y=3x^2-6x+2$ 的值小于 0 的 x 的集合是$\left\{x\middle|1-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

(2) 使 $y=25-x^2$ 的值等于 0 的 x 的集合是$\{-5，5\}$；大于 0 的 x 的集合是$\{x\mid-5<x<5\}$，小于 0 的 x 的集合是$\{x\mid x<-5，或x>5\}$.

(3) 因为抛物线 $y=x^2+6x+10$ 的开口向上，且与 x 轴无交点，所以使 $y=x^2+6x+10$ 的值等于 0 的集合为$\varnothing$；使 $y=x^2+6x+10$ 的值小于 0 的解集为$\varnothing$；使 $y=x^2+6x+10$ 的值大于 0 的集合为 **R**.

(4) 使 $y=-3x^2+12x-12$ 的值等于 0 的集合为$\{2\}$；使 $y=-3x^2+12x-12$ 的值小于 0 的解集为$\{x\mid x\neq2\}$；使 $y=-3x^2+12x-12$ 的值大于 0 的解集为$\varnothing$.

习题 3.2（第 89 页）

A 组

1. (1) $\left\{x\middle|x<-\frac{3}{2}，或x>\frac{5}{2}\right\}$；　(2) $\left\{x\middle|x<-\frac{\sqrt{13}}{2}，或x>\frac{\sqrt{13}}{2}\right\}$；

(3) $\{x\mid x<-2，或x>5\}$；　(4) $\{x\mid x<0，或x>9\}$.

2. (1) 解 $x^2-4x+9\geqslant 0$，因为 $\Delta=-20<0$，方程 $x^2-4x+9=0$ 无实数根，所以不等式的解集是 $\mathbf{R}$. 所以 $y=\sqrt{x^2-4x+9}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

(2) 解 $-2x^2+12x-18\geqslant 0$，即 $(x-3)^2\leqslant 0$. 所以 $x=3$. 所以 $y=\sqrt{-2x^2+12x-18}$ 的定义域是 $\{x\mid x=3\}$.

3. $\{m\mid m<-3-2\sqrt{2}$，或 $m>-3+2\sqrt{2}\}$.

4. $\mathbf{R}$.

5. 设能够在地面 2 m 以上的位置最多停留 t 秒.

依题意，$v_0t-\frac{1}{2}gt^2>2$，即：$12t-4.9t^2>2$. 这里 $t>0$. 所以 t 最大为 2（精确到秒）.

答：能够在地面 2 m 以上的位置最多停留 2 秒.

6. 设每盏台灯售价 x 元，则 $\begin{cases}x\geqslant 15,\\ x[30-2(x-15)]>400.\end{cases}$ 即 $15\leqslant x<20$. 所以售价 $x\in\{x\mid 15\leqslant x<20\}$.

B组

1. (1) $\varnothing$；　(2) $\{x\mid 3<x<7\}$；　(3) $\varnothing$；　(4) $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}<x<1\right\}$.

2. 由 $\Delta=(1-m)^2-4m^2<0$，整理，得 $3m^2+2m-1>0$，因为方程 $3m^2+2m-1=0$ 有两个实数根 -1 和 $\frac{1}{3}$，所以 $m_1<-1$，或 $m_2>\frac{1}{3}$，m 的取值范围是 $\{m\mid m<-1$，或 $m>\frac{1}{3}\}$.

3. 使函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{3}{4}$ 的值大于 0 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<3-\frac{\sqrt{42}}{2}\text{，或 }x>3+\frac{\sqrt{42}}{2}\right\}$.

4. 设风暴中心坐标为 (a,b)，则 $a=300\sqrt{2}$，所以 $(300\sqrt{2})^2+b^2<450$，即 $-150<b<150$. 而 $\frac{300\sqrt{2}-150}{20}=\frac{15}{2}(2\sqrt{2}-1)$，$\frac{300}{20}=15$. 所以，经过 $\frac{15}{2}(2\sqrt{2}-1)$ 小时码头将受到风暴的影响，影响时间为 15 小时.

3.3 二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题

一、本节知识结构

从实际问题中抽象出二元一次不等式(组)

二元一次不等式(组)表示的平面区域

简单的二元线性规划问题

二、教学重点与难点

重点：从实际问题中抽象出二元一次不等式（组），二元一次不等式（组）表示的平面区域及简单

的二元线性规划问题。

难点：二元一次不等式表示的平面区域的探究过程及从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题，并能加以解决.

三、编写意图与教学建议

本节教科书的主要内容是用二元一次不等式（组）表示平面区域，解决简单的线性规划问题，根据实际问题中的已知条件，找出约束条件和目标函数，利用图解法求得最优解，刻画平面区域是解决线性规划问题的关键所在．教材从研究具体的不等式解集所表示的平面区域入手，推广到一般的二元一次不等式 $Ax+By+C<0$（或 $Ax+By+C>0$）的解集所表示的平面区域.

3.3.1 二元一次不等式（组）与平面区域

本小节教科书通过实际例子——银行信贷资金分配问题，抽象出二元一次不等式（组）数学模型，引出二元一次不等式（组）的相关概念，这样编写的目的是使学生体验经历从实际问题中得到二元一次不等式（组）这一数学模型的抽象过程，了解二元一次不等式（组）这一数学模型产生的实际背景，体现数学问题是客观存在的，是从实际问题中产生和发展的.

二元一次不等式（组）表示的平面区域这一部分内容力求体现以下几点：

1. 注重探究过程　能正确的画出给定的二元一次不等式（组）表示的平面区域，是学习简单线性规划问题图解法的重要基础，由于二元一次不等式组表示的平面区域是各个不等式表示的平面区域的交集，决定了问题的研究应从二元一次不等式所表示的平面区域入手.

2. 注重探究方法　基于学生已有了对一元一次不等式组所表示的解集的认知，教科书首先通过第92页“思考”栏目，在唤起学生对一元一次不等式组的解集表示方法的回忆的基础上，用类比的方法提出了“二元一次不等式组的解集表示什么图形呢”的问题．在直角坐标系中，直线 $x-y=6$ 将平面上的所有点分为三类，依据直线 $x-y=6$ 上点的坐标适合方程 $x-y=6$，及以方程 $x-y=6$ 的解为坐标的点都在直线 $x-y=6$ 上的思想，进而研究不等式 $x-y<6$ 或 $x-y>6$ 的解为坐标的点与直线 $x-y=6$的位置关系．教学中教师要指导学生完成教科书第93页的表3.1．表3.1中在横坐标 $x=-3$，-2，-1，0，1，2，3 给定的前提下，纵坐标 $y_1=-9$，-8，-7，-6，-5，-4，-3 随之确定，而相应地满足不等式 $x-y<6$ 的纵坐标 y_2 的取值却是一个范围，得到纵坐标 y_2 的取值范围的过程并能在图3.3-2中标出点 P 和点 A，是有效地实现教材第93页“探究”栏目中内容的前提．进而推广到一般的二元一次不等式 $Ax+By+C<0$（或）的解集所表示的平面区域.

3. 注重探究手段　信息技术可作为探究平台，有条件的学校可利用信息技术手段对直线 $Ax+By+C=0$ 一侧的点 $p(x,y)$的坐标进行跟踪显示，并将点 $p(x,y)$的坐标代入 $Ax+By+C$ 中，观察所得值的符号，由学生发现得到处于直线 $Ax+By+C=0$ 同侧的点的坐标代入 $Ax+By+C$ 中符号都相同，直线 $Ax+By+C=0$ 异侧的点的坐标代入 $Ax+By+C$ 中符号不同，由此得到判定直线 $Ax+By+C>0(<0)$表示的是直线 $Ax+By+C=0$ 哪一侧的平面区域.

四、习题解答

练习（第97页）

1. B.

2. D.

3. B.

4. 分析：把已知条件用下表表示：

	工序所需时间（单位/分钟）			收益（单位：元）
	打磨	着色	上漆	
桌子A	10	6	6	40
桌子B	5	12	9	30
工作最长时间	450	480	450	

解：设家具厂每天生产A类桌子 x 张，B类桌子 y 张.

对于A类桌子，x 张桌子需要打磨 $10x$ 个小时，着色 $6x$ 个小时，上漆 $6x$ 个小时，对于B类桌子，y 个桌子需要打磨 $5y$ 个小时，着色 $12y$ 个小时，上漆 $9y$ 个小时，而打磨工人每天最长工作时间是450个小时，所以有 $10x+5y\leqslant 450$. 类似地，

$$6x+12y\leqslant 480;$$
$$6x+9y\leqslant 450.$$

在实际问题中，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$；所以，题目中包含的限制条件为

$$\begin{cases}10x+5y\leqslant 450,\\ 6x+12y\leqslant 480,\\ 6x+9y\leqslant 450,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

3.3.2 简单的线性规划问题

线性规划是优化的具体模型之一，二元一次不等式有丰富的实际背景，是刻画平面区域的重要工具. 学生能够体会线性规划的基本思想，并能借助几何直观解决一些简单的线性规划问题. 本节的主要目的，体会数学知识形成过程中所蕴涵的数学思想和方法，以及它们在后续学习中的作用，引发对现实世界中的一些数学模式进行思考是课程目标的重要内容.

教科书选择了金融、教育投资、工厂生产、饮食营养等方面几个背景实例，目的是让学生感受其中存在的二元一次不等关系，使学生建立二元一次不等式（组）与几何的直观联系，让学生去解决资源利用、人力调配、生产安排等方面的优化问题，从而引出线性规划的概念，并解决一些简单线性规划问题.

教科书利用"工厂日生产安排"这个具体的线性规划问题，说明了线性规划的意义，以及线性约束条件、线性目标函数、可行解、可行域、最优解等有关的基本概念，介绍了线性规划问题的图解方法，最后举例说明了线性规划在实际中的简单应用. 在实际问题的求解中，只要求能找出线性约束条件，并画出线性约束条件表示的平面区域，然后求出线性目标函数的最优解即可.

简单的线性规划问题中的可行域，一般的就是一个二元一次不等式（组）表示的平面区域，因而解决简单的线性规划问题，是以二元一次不等式（组）表示平面区域的知识为基础的. 在具体画二元一次不等式（组）表示的平面区域时，可利用信息技术.

求线性目标函数的最值问题是本节的重点，也是本节的难点. 教科书在求"工厂日生产安排"这个线性规划问题中的线性目标函数 $z=2x+3y$ 的最大值时，把 $z=2x+3y$ 变形为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$，即化成直线的斜截式形式，这样编写目的是赋予目标函数 z 以几何直观及几何含义，从而易于学生理解.

显然当截距$\frac{z}{3}$最大时，z取得最大值，且区域内的每一个点的坐标惟一确定截距$\frac{z}{3}$．当z变化时，$y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$表示一组互相平行的直线，教师可以用计算器或计算机进行演示，在观察中使学生发现直线$y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$经过平面区域内哪一点$P$时，截距$\frac{z}{3}$最大．教材这样编写力求有助于师生对这部分内容的领会理解，力求体现教材的可操作性．

本节内容更侧重于解决问题中的应用，从研究性学习的角度，可以启发学生寻求实际生活中的例子，自己去体会二元一次不等式（组）建模过程．

四、教学设计案例

二元一次不等式表示的平面区域

1. 教学任务的分析

本节介绍了用二元一次不等式表示平面区域和简单的线性规划问题，使学生会用二元一次不等式表示平面区域，了解线性规划的意义，了解线性约束条件、线性目标函数、可行解、可行域、最优解等基本概念，了解线性规划问题的图解法，并能应用线性规划的方法解决一些简单的实际问题，以提高解决实际问题的能力．

2. 教学基本流程

3. 教学重点与难点

重点：二元一次不等式表示的平面区域．

难点：把实际问题转化成线性规划问题，并给出解答．解决难点的关键是根据实际问题中的已知条件，找出约束条件和目标函数，利用图解法求得最优解．

4. 情境设计

问　题	问题设计意图	师生活动	备　注
引例：一家银行的信贷部计划年初投入2 500万元用于企业贷款和个人贷款，预计这笔资金至少可带来3万元的收益，其中从企业贷款中获益12%，从个人贷款中获益10%，那么，信贷部应该如何分配资金呢？ 问题1： 实际问题$\xrightarrow{抽象}$数学问题	引起学生对优化问题的注意、兴趣，激发学生的探究欲望. 让学生经历建立线性规划模型的三个特殊过程中的第一个过程——设立决策变量.	生：默默读题独立思考. 师：日常生活中，常常会遇到这类对有限的资源（人力、物力、财力）如何合理分配利用，使其达到最优效果的问题. 尤其是在国民经济、军事、管理决策等领域，为此科学的管理是一种重要的方法和手段. 师：从哪里入手？ 生：在独立思考基础上与周围学生交流讨论. 师：在巡视中了解学生的认知状况.	投影片显示例题. 教师利用计算机或投影打出相关图片.
集体交流解题思路	在获得探究体验的基础上，通过交流形成共识，从而强化设立变量的过程.	师：请谈谈你是从哪入手解决问题的. 生：（各自发表意见）认为解决此类问题应从设立变量入手.	教师对学生的回答要予以指导、肯定.
引导学生反思 问题2： 文字语言$\xrightarrow{转化}$符号语言 建立目标函数，寻找限制条件，展示各自列出的不等式组	使学生在反思中认识到建立线性规划模型必须首先确立未知变量. 将不等式组的建立过程留给学生.	师：通过彼此交流，你有什么收获？ 生：如同列方程解应用题，必须首先确立未知变量. 师：如何建立目标函数，将限制条件用数学语言表示. 生：独立探究（体验）.	培养反思意识. 学生易忽视$x\geqslant 0$，及$y\geqslant 0$的关系.
（在巡视基础上有针对性的请若干学生）学生板演列出的不等式组	在交流中引导学生发现各种错误并分析错因，使学生自己从错误中走出来.	师：巡视 师：板演列出的不等式组 生：（订正后）得不等式组： $\begin{cases}x+y\leqslant 2\,500\\1.12x+1.1y>3 \quad (*)\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$	有条件可利用实物投影显示列不等式组中的各种错误.
二元一次不等式组的定义.	由（*）式抽象出二元一次不等式组的概念.	师：给出二元一次不等式组的定义.	也可由学生试着给出定义.
问题3： 二元一次不等式组的解. 问题4： 二元一次不等式解集的表示方法.	唤起学生对二元一次方程组解的回忆. （同化与顺应）使学生明确二元一次不等式组解是每个二元一次不等式解集的交集.	师：什么是二元一次不等式组的解？ 例如：求不等式组$\begin{cases}x+3>0\\x-4<0\end{cases}$的解.	若学生基础好也可不做此铺垫.
在直角坐标系中表示二元一次方程$x+y-1=0$的解集.	将求不等式组的解转化为求二元一次不等式的解.	师：请在直角坐标系中表示出二元一次方程$x+y-1=0$的解集.	

续表

问　题	问题设计意图	师生活动	备　注
若从一次函数的观点看待方程 $x+y-1=0$，你会在直角坐标系中表示出 $x+y-1=0$ 的解集吗？$y=-x+1$ 与 $y>-x+1$ 的解集有什么关系？$y>-x+1$ 的解集表示的图形呢？ 类似地 $y<-x+1$ 呢？	从方程的解出发，渗透函数思想、数形结合的思想，培养学生对知识的迁移能力．引导学生取点探究，发现 $y_1<y_2$ 时，点 (x, y_2) 在直线 $y=-x+1$ 的右上方，反之在直线 $y=-x+1$ 的右下方． 培养学生发现问题，分析问题的能力，渗透方程的思想，数形结合的思想	生：将 $x+y-1=0$ 改写为 $y=-x+1$，得到直线． 师：设点 (x, y_1) 是直线 $y=-x+1$ 上一点，若 $y_1<y_2$，试探究点 (x, y_2) 的位置？$y_1>y_2$ 呢？ 生：小组讨论． 师：演示 $y>-x+1$ 的解集表示的图形．	不定方程 $x+y-1=0$ 的解学生有困难．
（板书课题）二元一次不等式表示的平面区域及平面区域的概念．		生：倾听，记笔记．	
例 1　画出 $2x+y<6$ 表示的平面区域． 例 2　画出 $\begin{cases} x-y+5\geqslant 0, \\ x+y\geqslant 0, \\ x\leqslant 3 \end{cases}$ 表示的平面区域．	使学生会表示二元一次不等式表示的平面区域． 通过练习，加深对二元一次不等式表示平面区域的理解．	生：(1) 作出边界 $2x+y=6$ (2) 取点 $(0, 0)$，判断点 $(0, 0)$ 与直线 $2x+y=6$ 的位置． (3) 画出图形． 生：把解化成 $\begin{cases} y\leqslant x+5, \\ y\geqslant -x, \\ x\leqslant 3. \end{cases}$ 生：归纳、反思、交流．	
小结：(1) 学习了哪些内容？ (2) 学到了哪些研究问题的方法？	培养学生反思及归纳能力．	学生思考、总结，并发表自己的意见，教师指导，并给出完整小结．	

课后练习：

1. 不等式 $x-2y+6>0$ 表示的区域在直线 $x-2y+6=0$ 的（　　）：

　(A) 右上方　　(B) 右下方　　(C) 左上方　　(D) 左下方

2. 直线 $x+2y-1=0$ 右上方的区域可用不等式________表示．

3. 画出不等式组 $\begin{cases} x+3y+6\geqslant 0 \\ x-y+2<0 \end{cases}$ 表示的区域．

4. 画出不等式组 $\begin{cases} x+3y\leqslant 15 \\ 2x+y<15 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 表示的区域．

五、习题解答

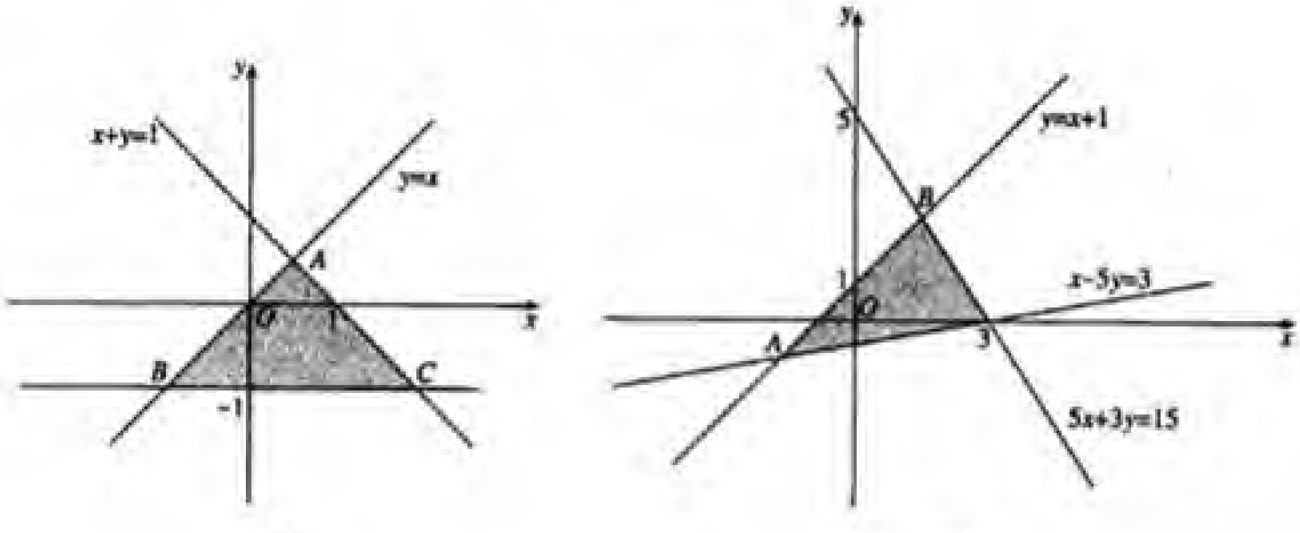
练习（第 103 页）

1. (1) 目标函数为 $z=2x+y$，可行域如图所示，作出直线 $y=-2x+z$，可知 z 要取最大值，即直线经过点 C 时，

解方程组 $\begin{cases}x+y=1,\\ y=-1.\end{cases}$ 得 $C(2,\ -1)$，

所以，

$$z_{max}=2x+y=3.$$



(1)　　(2)

（第 1 题）

(2) 目标函数为 $z=3x+5y$，可行域如图所示，作出直线 $z=3x+5y$，可知，直线经过点 B 时，Z 取得最大值．直线经过点 A 时，Z 取得最小值．

解方程组

$$\begin{cases}y=x+1,\\ x-5y=3,\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}y=x+1,\\ 5x+3y=15.\end{cases}$$

可得点 $A(-2,\ -1)$ 和点 $B(1.5,\ 2.5)$．所以

$$z_{max}=17,$$

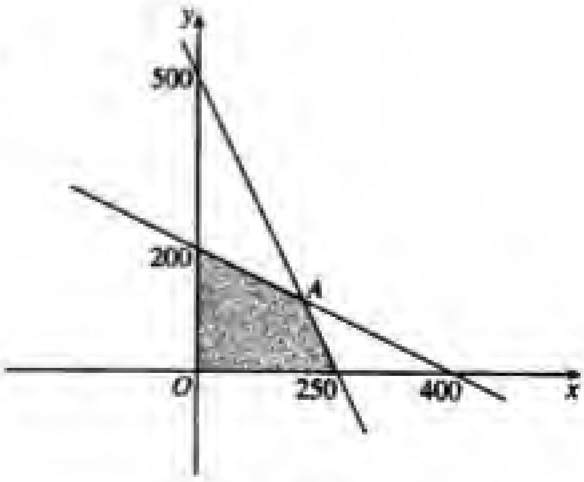
$$z_{min}=-11.$$

2. 设每月生产甲产品 x 件，生产乙产品 y 件，每月收入为 z，目标函数为 $z=3x+2y$，需要满足的条件是

$$\begin{cases}x+2y\leqslant 400,\\ 2x+y\leqslant 500,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$$

作直线 $z=3x+2y$，当直线经过点 A 时，z 取得最大值．

解方程组



（第 2 题）

$$\begin{cases}x+2y=400,\\2x+y=500,\end{cases}$$

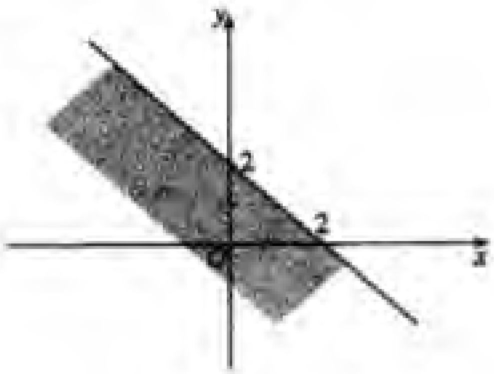
可得点 $A(200, 100)$，z 的最大值为 800.

习题 3.3（第 105 页）

A 组

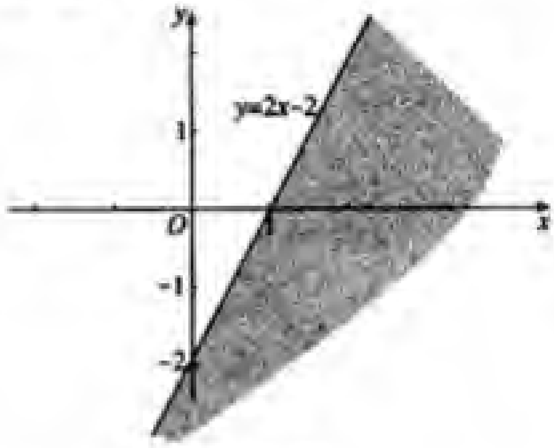
1. 画图求解二元一次不等式：

(1) $x+y\leqslant 2$；



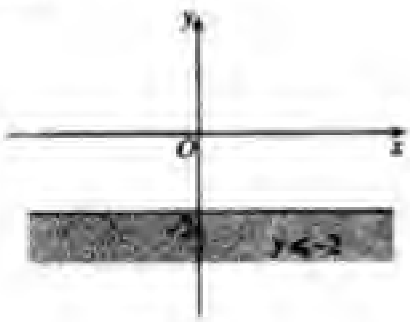
(第 1(1)题)

(2) $2x-y>2$；



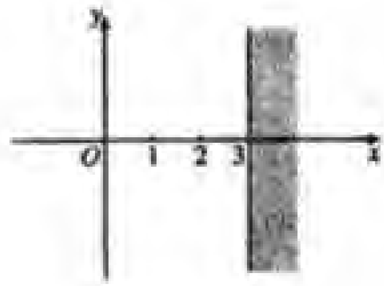
(第 1(2)题)

(3) $y\leqslant -2$；



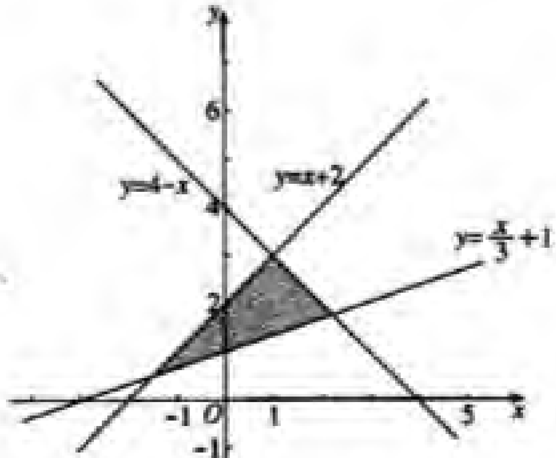
(第 1(3)题)

(4) $x\geqslant 3$.



(第 1(4)题)

2.



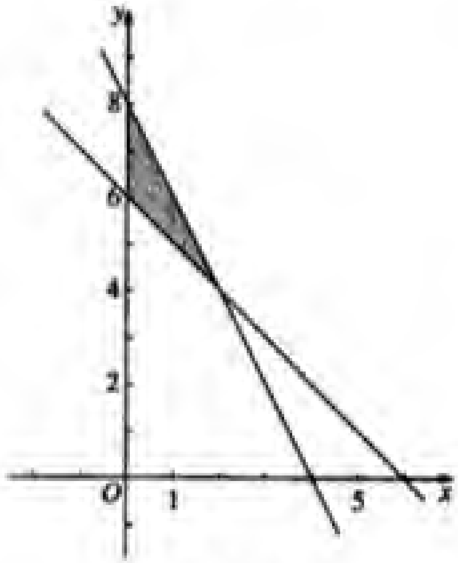
(第 2 题)

3. 分析：将所给信息用下表表示：

	每次播放时间（单位：分钟）	广告时间（单位：分钟）	收视观众（单位：万）
连续剧甲	80	1	60
连续剧乙	40	1	20
播放最长时间	320		
最少广告时间		6	

解：设每周播放连续剧甲 x 次，播放连续剧乙 y 次，收视率为 z. 目标函数为 $z=60x+20y$，所以，题目中包含的限制条件为

$$\begin{cases}80x+40y\leqslant 320,\\ x+y\geqslant 6,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$



（第3题）

可行域如图. 解方程组

$$\begin{cases}80x+40y=320,\\ x+y=6,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2x+y=8,\\ x+y=6,\end{cases}$$

得点 M 的坐标为 (2, 4)，所以

$$z_{\max}=60x+20y=200\text{（万）}.$$

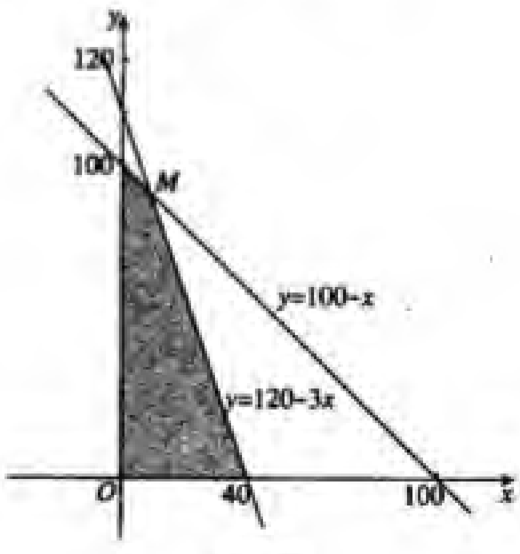
答：电视台每周应播映连续剧甲 2 次，播放连续剧乙 4 次，才能获得最高的收视率.

4. 设每周生产空调器 x 台、彩电 y 台，则生产冰箱 $120-x-y$ 台，产值为 z. 目标函数为

$$\begin{aligned}z&=4x+3y+2(120-x-y)\\&=2x+y+240.\end{aligned}$$

所以，题目中包含的限制条件为

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}(120-x-y)\leqslant 40,\\ 120-x-y\geqslant 20,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$



（第4题）

即

$$\begin{cases}3x+y\leqslant 120,\\ x+y\leqslant 100,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

可行域如图. 解方程组

$$\begin{cases}3x+y=120,\\ x+y=100,\end{cases}$$

得点 M 的坐标为（10，90），所以

$$z_{max}=2x+y+240=350(\text{千元}).$$

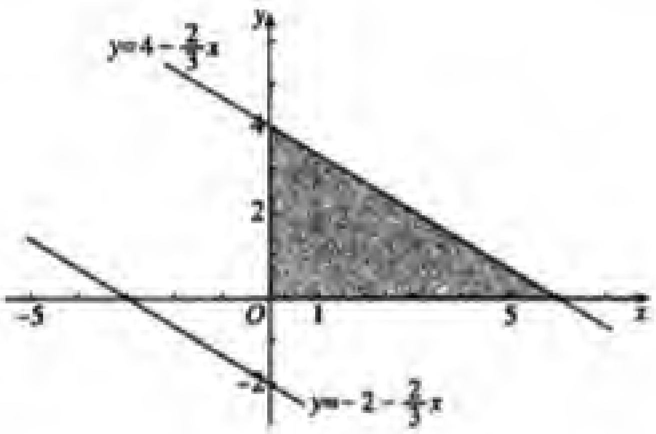
答：每周应生产空调器 10 台，彩电 90 台，冰箱 20 台，才能使产值最高，最高产值是 1 050 千元。

B 组

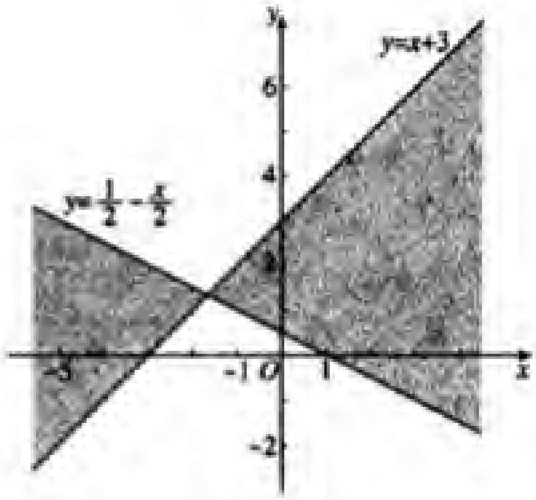
1. 画出二元一次不等式组

$$\begin{cases}2x+3y\leqslant 12,\\ 2x+3y>-6,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

所表示的区域.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 画出 $(x+2y-1)(x-y+3)>0$ 表示的区域.

3. 设甲粮库要向 A 镇运送大米 x 吨、向 B 镇运送大米 y 吨，总运费为 z. 则乙粮库要向 A 镇运送大米 $(70-x)$ 吨、向 B 镇运送大米 $(110-y)$ 吨，目标函数（总运费）为

$$z=12\times 20\times x+25\times 10\times y+15\times 12\times(70-x)+20\times 8\times(110-y)=60x+90y+30\ 200.$$

所以，题目中包含的限制条件为

$$\begin{cases}x+y\leqslant 100,\\ (70-x)+(110-y)\leqslant 80,\\ 0\leqslant x\leqslant 70,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

所以当 $x=70$，$y=30$ 时，总运费最省 $z_{min}=37\ 100$（元），

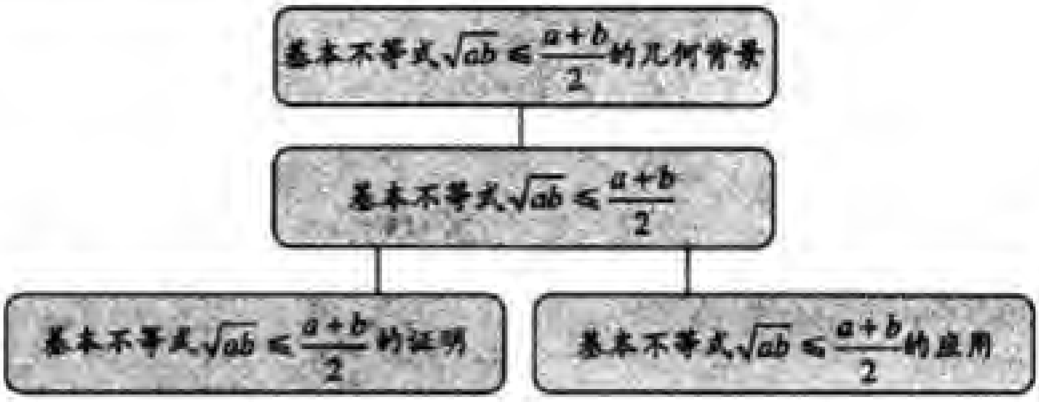
所以当 $x=0$，$y=100$ 时，总运费最不合理 $z_{max}=39\ 200$（元）.

使国家造成不该有的损失 2 100 元.

答：甲粮库要向 A 镇运送大米 70 吨、向 B 镇运送大米 30 吨，乙粮库要向 A 镇运送大米 0 吨、向 B 镇运送大米 80 吨，此时总运费最省，为 37 100 元. 最不合理的调运方案是甲粮库要向 A 镇运送大米 0 吨、向 B 镇运送大米 100 吨，乙粮库要向 A 镇运送大米 70 吨、向 B 镇运送大米 10 吨，此时总运费为 39 200 元，使国家造成损失 2 100 元.

3.4 基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节教学重点是应用数形结合的思想理解基本不等式，并从不同角度探索基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$的证明过程．难点是用基本不等式求最大值和最小值．

三、编写意图与教学建议

本节主要内容是使学生了解基本不等式的代数、几何背景及基本不等式的证明及应用．

本节一开始，以北京召开的第24届国际数学家大会的会标为问题背景，提出“你能在这个图中找出一些相等关系或不等关系吗？”意图在于利用图3.4-1相关面积间存在的数量关系，抽象出不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$．在此基础上从三种不同角度引导学生认识基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a,\ b\geqslant 0)$：

① 当$a>0$，$b>0$时，在不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$中，以$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$分别代替a、b，得到$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a,\ b\geqslant 0)$；

② 借助初中阶段学生已熟知的几何图形（图3.4-3），引导学生探究不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$（$a$，$b>0$）的几何解释，通过数与形的结合，赋予不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$（$a$，$b>0$）几何直观．目的是利用学生原有的平面几何知识，进一步领悟到不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$成立的条件$a>0$，$b>0$，及当且仅当$a=b$时，等式$\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}$才能成立；

③ 在不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$（$a$，$b\geqslant 0$）的证明过程中，以填空的形式突出体现了分析法证明的关键步骤，意在把思维的时空切实留给学生，让学生在探究的基础上体会分析法的证明思路，加大了证明

不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$（$a$，$b\geqslant0$）的探究力度.

教科书还通过两个实际问题分析了不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$（$a$，$b\geqslant0$）的实用价值，目的是让学生感受数学的应用价值. 在使用基本不等式解决例 1、例 2 两个实际问题的过程中，教学时应着重引导学生领会不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$（$a$，$b\geqslant0$）成立时的三个限制条件（简称一正、二定、三相等）在求解实际问题的最大、最小值中的作用.

四、习题解答

练习（第 113 页）

1. 因为 $x>0$，所以

$$x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2,$$

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$时，即 $x=1$ 时取等号，所以当 $x=1$ 时，即 $x+\frac{1}{x}$的值最小，最小值是 2.

2. 设两条直角边的长分别为 a，b，$a>0$，且 $b>0$，因为直角三角形的面积等于 50，即

$$\frac{1}{2}ab=50,$$

所以，

$$a+b\geqslant2\sqrt{ab}=2\sqrt{100}=20,$$

当且仅当 $a=b=10$ 时取等号.

答：当两条直角边的长均为 10 时，两条直角边的和最小，最小值是 20.

3. 设矩形的长与宽分别为 a cm，b cm. $a>0$，$b>0$，

因为周长等于 20，所以

$$a+b=10,$$

所以

$$S=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25,$$

当且仅当 $a=b=5$ 时取等号.

答：当矩形的长与宽均为 5 时，面积最大.

4. 设底面的长与宽分别为 a m，b m. $a>0$，$b>0$，因为体积等于 32 m^3，高 2 m，所以底面积为 16 m^2，即：

$$ab=16$$

所以用纸面积是

$$\begin{aligned}S&=2ab+2bc+2ac\\&=32+4(a+b)\\&\geqslant32+42\sqrt{ab}\\&=32+32\\&=64\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=4$ 时取等号.

答：当底面的长与宽均为 4 米时，用纸最少.

习题 3.4（第 113 页）

A 组

1. (1) 设两个正数为 a，b，则 $a>0$，$b>0$，且 $ab=36$，所以

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=2\sqrt{36}=12,$$

当且仅当 $a=b=6$ 时取等号.

答：当这两个正数均为 6 时，它们的和最小.

(2) 设两个正数为 a，b，依题意 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=18$，所以

$$a\times b\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{18}{2}\right)^2=81,$$

当且仅当 $a=b=9$ 时取等号.

答：当这两个正数均为 9 时，它们的积最大.

2. 设矩形的长为 x m，宽为 y m，菜园的面积为 S m^2.

则

$$x+2y=30,$$
$$S=x\times y.$$

由基本不等式与不等式的性质，可得

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times x\times 2y\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\times\frac{900}{4}\\&=\frac{225}{2}.\end{aligned}$$

当 $x=2y$，即

$$x=15,$$
$$y=\frac{15}{2}$$

时，菜园的面积最大，最大面积是 $\frac{225}{2}$ m^2.

3. 设矩形的长和宽分别为 x 和 y，圆柱的侧面积为 z，因为 $2(x+y)=36$，即

$$\begin{aligned}&x+y=18,\\&z=2\pi\times x\times y\\&\quad\leqslant 2\pi\times\left(\frac{x+y}{2}\right)^2,\\&\quad=162\pi.\end{aligned}$$

当 $x=y$ 时，即长和宽均为 9 时，圆柱的侧面积最大.

4. 设房屋地面长为 x m，宽为 y m，总造价为 z 元，则

$$xy=12,$$
$$y=\frac{12}{x},$$
$$z=3y\times 1\,200+6x\times 800+5\,800$$

$$=\frac{12\times 3\,600}{x}+4\,800x+5\,800$$
$$\geqslant 2\sqrt{3\,600\times 12\times 4\,800}+5\,800$$
$$=34\,600.$$

当$\frac{12\times 3\,600}{x}=4\,800x$时，即$x=3$时，$z$有最小值，最低总造价为34 600元.

B组

1. 设矩形的长AB为x，由矩形$ABCD(AB>AD)$的周长为24可知，宽AD为$12-x$，设$PC=a$，则$DP=x-a$.

所以
$$(12-x)^2+(x-a)^2=a^2.$$
可得
$$a=\frac{x^2-12x+72}{x},$$
$$DP=x-a=\frac{12x-72}{x}.$$
所以$\triangle ADP$的最大面积
$$S=\frac{1}{2}(12-x)\frac{12x-72}{x}=6\times\frac{-x^2+18x-72}{x}$$
$$=6\times\left[-\left(x+\frac{72}{x}\right)+18\right].$$
由基本不等式与不等式的性质
$$S\leqslant 6[-2\sqrt{72}+18]$$
$$=6\times(18-12\sqrt{2})$$
$$=108-72\sqrt{2}.$$
当$x=\frac{72}{x}$，即$x=6\sqrt{2}$ m时，菜园的面积最大，最大面积是$(108-72\sqrt{2})\text{m}^2$.

2. 过点C作$CD\perp AB$交AB延长线于点D. 设$\angle BCD=\alpha$，$\angle ACD=\beta$，$CD=X$. 在$\triangle BCD$中，
$$\tan\alpha=\frac{b-c}{x}.$$
在$\triangle ACD$中，
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{a-c}{x},$$
则
$$\tan\beta=\frac{\frac{a-c}{x}}{1+\frac{a-c}{x}\times\frac{b-c}{x}}$$
$$=\frac{a-c}{x+\frac{(a-c)(b-c)}{x}}.$$
$$\leqslant\frac{a-c}{2\sqrt{x\times\frac{(a-c)(b-c)}{x}}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{b-c}}.$$

当且仅当

$$x=\frac{(a-c)(b-c)}{x},$$

即

$$\beta=\arctan\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{b-c}}.$$

时视角最大.

复习参考题（第 115 页）解答

A 组

1. $\sqrt{\frac{5}{12}}+\sqrt{\frac{1}{5}}<\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{2}{7}}$.

2. 化简得 $A=\{x\mid -2<x<3\}$，$B=\{x\mid x<-4$，或 $x>2\}$，所以

$$A\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$$

3. 当 $k<0$ 时，一元二次不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 对一切实数 x 都成立，即二次函数 $y=2kx^2+kx-\frac{3}{8}$ 在 x 轴下方，$\Delta=k^2-4(2k)\left(-\frac{3}{8}\right)<0$，解之得：$-3<k<0$.

当 $k>0$ 时：二次函数 $y=2kx^2+kx-\frac{3}{8}$ 开口朝上，一元二次不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 不可能对一切实数 x 都成立.

所以 $-3<k<0$.

4. 不等式组 $\begin{cases}4x+3y+8>0\\ x<0\\ y<0\end{cases}$ 表示的平面区域内的整点坐标是 $(-1,-1)$.

5. 设每天派出 A 型车 x 辆，B 型车 y 辆，成本为 z.

所以，题目中包含的限制条件为 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 7,\\ 0\leqslant y\leqslant 4,\\ 48x+60y\geqslant 360,\end{cases}$

目标函数为 $z=160x+252y$，把 $z=160x+252y$ 变形为 $y=-\frac{40}{63}x+\frac{1}{252}z$，得到斜率为 $-\frac{40}{63}$，在 y 轴上的截距为 $\frac{1}{252}z$，随 z 变化的一族平行直线. 在满足可行域的整点中，点 $M(7,1)$ 使得 z 取得最小值. 所以每天派出 A 型车 7 辆，B 型车 1 辆，成本最小.

答：电视台每周应播映连续剧甲 2 次，播放连续剧乙 4 次，才能获得最高的收视率.

6. 设扇形的半径是 x，扇形的弧长为 y，因为

$$S=\frac{1}{2}xy,$$

扇形的周长为

$$Z=2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}=4\sqrt{S},$$

当 $2x=y$，即 $x=\sqrt{S}$，$y=2\sqrt{S}$ 时，Z 可以取到最小值，最小值为 $4\sqrt{S}$.

7. 设扇形的半径是 x，扇形的弧长为 y，因为

$$P=2x+y,$$

扇形的面积为

$$Z=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\frac{1}{2}(2x)y\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2=\frac{P^2}{16}.$$

当 $2x=y$，即 $x=\frac{P}{4}$，$y=\frac{P}{2}$时，可以取到 Z 的最大值．半径为$\frac{P}{4}$时扇形面积最大值为$\frac{P^2}{16}$.

8. 设汽车的运输成本为 y，

$$y=(bv^2+a)\times\frac{s}{v}=sbv+\frac{sa}{v}.$$

当 $sbv=\frac{sa}{v}$时，即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$且$\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$ 时，y 有最小值：

$$y=sbv+\frac{sa}{v}\geqslant2\sqrt{sbv\times\frac{sa}{v}}=2s\sqrt{ab},$$

最小值为 $2s\sqrt{ab}$.

当$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$ 时，由函数 $y=sbv+\frac{sa}{v}$的单调性可知，$v=c$ 时 y 有最小值，最小值为 $sbc+\frac{sa}{c}$.

B 组

1. 证明：因为

$$a^2+b^2\geqslant2ab,$$
$$b^2+c^2\geqslant2bc,$$
$$a^2+c^2\geqslant2ca.$$

所以

$$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant2(ab+bc+ca).$$

所以

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

2. D.

3. (1) $\left\{x\,\middle|\,x<-2\text{ 或 }-2<x<\frac{3}{4}\text{ 或 }x>6\right\}$；

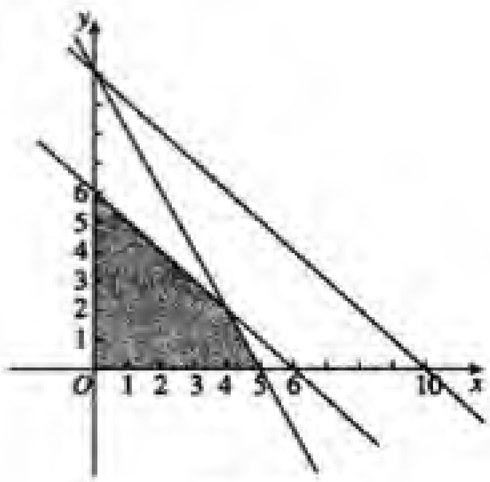
(2) $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant-1\text{ 或 }\frac{2}{3}\leqslant x<\frac{3}{4}\text{ 或 }x>3\right\}$.

4. $m=1$.

5. 设生产裤子 x 条、裙子 y 条，收益为 z. 则目标函数为 $z=20x+40y$.

所以约束条件为

$$\begin{cases}x+y\leqslant10,\\2x+y\leqslant10,\\x+y\leqslant6,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0.\end{cases}$$



（第 5 题）

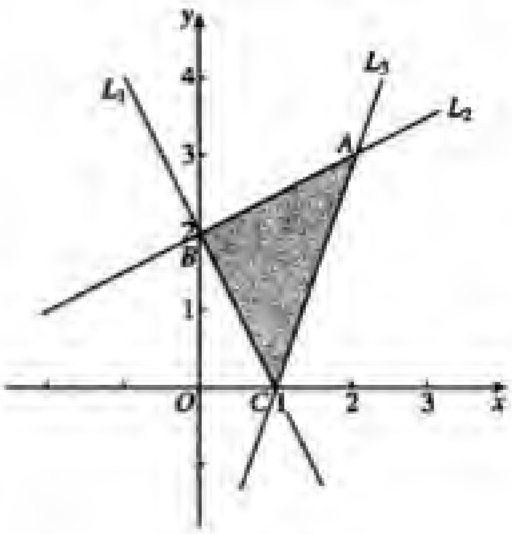
6. 因为 x^2+y^2 是区域内的点到原点的距离的平方，所以，当

$$\begin{cases}x-2y+4=0,\\3x-y-3=0\end{cases}$$

即 $x_A=2$，$y_A=3$ 时，(x^2+y^2) 的最大值为 13. 当

$$\begin{cases}2x+y-2=0,\\3x-y-3=0\end{cases}$$

即 $x_C=1$，$y_C=0$ 时，(x^2+y^2) 的最小值为 1.



（第 6 题）

7. 高为 3 米，长为 6 米时，体积取得最大值，最大值为 32.

8. 按第一种策略购物，设第一次购物时的价格为 p_1，购 n kg，第二次购物时的价格为 p_2，仍购 n kg，按这种策略购物时两次购物的平均价格为

$$\frac{p_1n+p_2n}{2n}=\frac{p_1+p_2}{2}.$$

若按第二种策略购物，第一次花 m 元钱，能购 $\frac{m}{p_1}$ kg物品，第二次仍花 m 元钱，能购 $\frac{m}{p_2}$ kg 物品，两次购物的平均价格为

$$\frac{2m}{\frac{m}{p_1}+\frac{m}{p_2}}=\frac{2}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}.$$

比较两次购物的平均价格：

$$\begin{aligned}&\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{2}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}\\=&\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}\\=&\frac{(p_1+p_2)^2-4p_1p_2}{2(p_1+p_2)}\\=&\frac{(p_1-p_2)^2}{2(p_1+p_2)}\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以，第一种策略的平均价格高于第二种策略的平均价格，因而，用第二种策略比较经济. 一般地，如果是 n 次购买同一种物品，用第二种策略购买比较经济.

Ⅲ 自我检测题

一、选择题

1. a，$b\in\mathbf{R}$，下列命题正确的是（　　）

A. 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$.　　B. 若 $|a|>b$，则 $a^2>b^2$.

C. 若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$.　　D. 若 $a\neq|b|$，则 $a^2\neq b^2$.

2. 设 $M=2a(a-2)$，$N=(a-1)(a-3)$，则有（　　）

A. $M>N$.　　B. $M\geqslant N$.　　C. $M<N$.　　D. $M\leqslant N$.

3. 不等式 $x^2-2x-5>2x$ 的解集是（　　）

A. $\{x\mid x\geqslant5$ 或 $x\leqslant-1\}$.　　B. $\{x\mid x>5$ 或 $x<-1\}$.

C. $\{x\mid -1<x<5\}$.　　D. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant5\}$.

4. 若 $a>b>0$，则下列不等式成立的是（　　）

A. $a>b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.　　B. $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$.

C. $a>\frac{a+b}{2}>b>\sqrt{ab}$.　　D. $a>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}>b$.

5. 不等式 $x+(a-1)y+3>0$ 表示直线 $x+(a-1)y+3=0$（　　）

A. 上方的平面区域.　　B. 下方的平面区域.

C. 当 $a>1$ 时，上方的平面区域.　　D. 当 $a<1$ 时，下方的平面区域.

二、填空题

6. 若 $a>b$，且 a，b 同号，则 $\frac{1}{a}$______ $\frac{1}{b}$（用不等号 “$>$” 或 “$<$” 填空）.

7. 不等式 $2^{x^2-5x+5}>\frac{1}{2}$ 的解集是________.

8. 正数 a，b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是______.

9. $x\geqslant0$，$y\geqslant0$ 及 $x+y\leqslant4$ 所围成的平面区域的面积是______.

10. 配制 A、B 两种药剂，需要甲、乙两种原料，已知配一剂 A 种药需甲料 3 毫克，乙料 5 毫克；配一剂 B 种药需甲料 5 毫克，乙料 4 毫克. 今有甲料 20 毫克，乙料 25 毫克，若 A、B 两种药至少各配一剂，应满足的条件是________.

三、解答题

11. 求函数 $y=x+\frac{1}{x}(x\neq0)$ 的最值.

12. 设 $z=2x+y$，其中变量 x，y 满足条件

$$\begin{cases}x-4y\leqslant-3,\\3x+5y\leqslant25,\\x\geqslant1\end{cases}$$

求 z 的最大值和最小值.

参考答案

一、C、A、B、B、C

二、6. ∵a，b 同号，∴$\frac{1}{ab}>0$. 由 $a>b$，两边同乘以 $\frac{1}{ab}$，得 $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$，即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

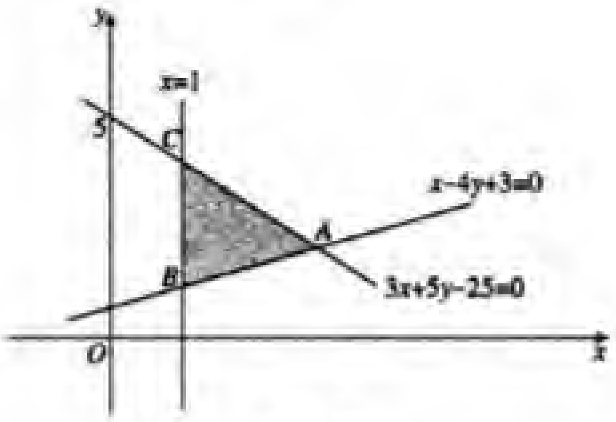
7. $\{x\mid x<2$ 或 $x>3\}$.

8. $[9,+\infty)$. ∵a，b 是正数，∴$ab=a+b+3\geqslant\sqrt{ab}+3$，解得 $\sqrt{ab}\geqslant3$，即 $ab\geqslant9$ 考查不等式基本定理，实质上是求 ab 的最小值为 9.

9. 8.

10. 设 A、B 两种药分别配 x，y 剂，$(x,y\in\mathbf{N})$，得

$$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ y\geqslant 1,\\ 3x+5y\leqslant 20,\\ 5x+4y\leqslant 25.\end{cases}$$



（第 10 题）

三、11. 当 $x>0$ 时，$\frac{1}{x}>0$，

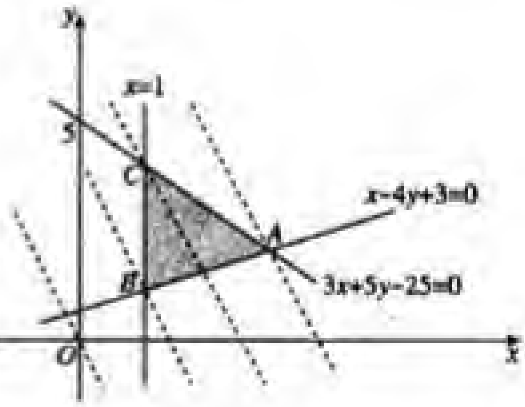
$$y=x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2;$$

当 $x<0$ 时，$-\frac{1}{x}<0$，

$$y=-\left(-x-\frac{1}{x}\right)\leqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=-2,$$

所以 $x\neq 0$ 时，函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 无最值.

12. 满足条件 $\begin{cases}x-4y\leqslant -3\\ 3x+5y\leqslant 25\\ x\geqslant 1\end{cases}$ 可行域如图，将目标函数 $z=2x+y$ 变形为 $y=-2x+z$，直线 $y=-2x+z$ 为 $k=-2$ 的平行线系，z 是它们的纵截距. 作平行直线过不等式组表示平面区域，分别过 A、B 点时直线的纵截距取最值. 求 A、B 点坐标，代入 $z=2x+y$，过 A 点时 $z_{max}=12$，过 B 点时 $z_{min}=3$.



（第 12 题）